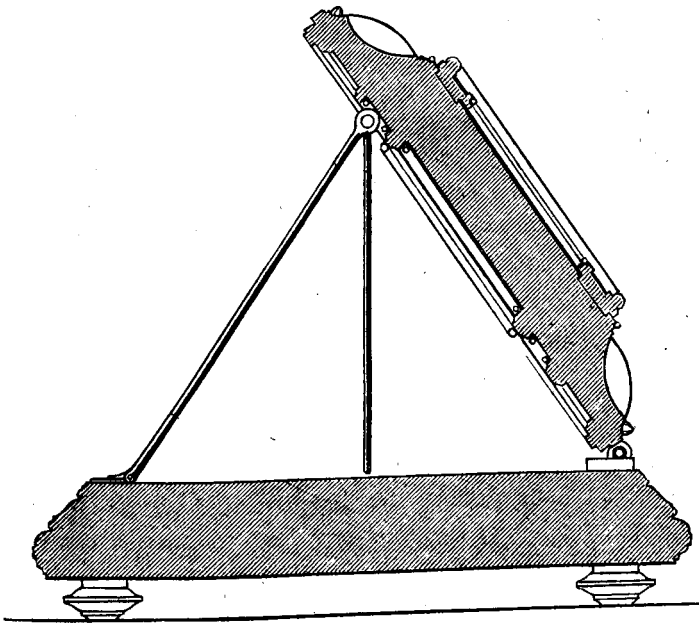


## Ehrengeschenk

**des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines in Wien, gewidmet Herrn Oberbaurath Fr. Schmidt.**

(Hiezu Abbildung auf Tafel 32.)

Das zur Durchführung des bezüglichlichen Beschlusses der ordentl. Generalversammlung am 26. Februar 1881 eingesetzte Comité erkannte sofort, dass in diesem Falle von der bei ähnlichen Anlässen beliebten Weise, irgend einen Kunst- oder Industriegegenstand zu erwerben oder anfertigen zu lassen, welches Object dann mit mehr oder weniger passender Widmung versehen als Ehrengeschenk überreicht wird, vollkommen abgesehen werden müsse. Es war vielmehr dieses Comité sich bewusst, nur dann in möglichster Uebereinstimmung mit den Ansichten der Vereinsgenossen, als auch entsprechend der Stellung des Vereines, sowie nicht minder in Harmonie mit der Anschauung des mit der Ovation Bedachten vorzugehen, wenn eine Form des Ehrengeschenk gewählt werde, welche ermöglicht, dass der denkwürdige Beschluss der Generalversammlung, welcher den Dank des Vereines in ausserordentlicher Weise bekundet, hiebei vor Allem zur Anschauung gebracht werde.



Hiernach ergab sich der Beschluss (da von einer Adresse ohnehin nicht die Rede sein konnte), es sei eine Ehrengedenktafel in künstlerischer Form und Ausstattung, mit den passenden Symbolen geziert anzufertigen, welche Tafel in monumentaler Weise den Beschluss der Generalversammlung zum Ausdrucke bringe.

Eine auf Grundlage dieses Beschlusses angefertigte Skizze des dem Comité angehörenden Architekten A. von Wieleman's wurde genehmigt und sofort an die Ausführung des Gegenstandes geschritten, zu dessen Abbildung (Tafel 32) nur noch einige Erläuterungen nachzutragen sind.

Dem Vorschlage entsprechend wurde als hauptsächlich zu verwendendes Materiale das Eisen gewählt, als ein Materiale, welches sowohl die interessanteste, künstlerische und technische Ausarbeitung und Decorirung gestattet, als

auch aus dem Grunde, weil dasselbe für einen technischen Verein unserer Tage geradezu als symbolisches Material bezeichnet werden muss.

Die innere eigentliche getriebene Platte, im reichen Ornamentstyl des XVI. Jahrhunderts gehalten, trägt auf ebenfalls in Eisen getriebenen frei aufgesetzten Cartouchen und Feldern den Text der Widmung, zu beiden Seiten des Mittelfeldes zwei allegorische Gestalten, die Architektur und die Technik vorstellend, über demselben thront in decorirter Nische die Fama (der Ruhm) mit der Tuba und dem österreichischen Wappen, in gleicher Weise andeutend wie sehr der berühmte Meister zum Ruhme des Vaterlandes beigetragen hat. In vier kleineren Rundfeldern erscheinen die Symbole der Architektur, des Bergbaues, des Eisenbahn- und des Maschinenwesens angebracht. Der Grund der Platte ist schwarz geätzt, die Feldertheilungen sind glänzend blank mit Goldniello, die Cartouchen und Ornamente matt blank, mit Schriften in Vergoldung ausgeführt. — Umschlossen ist diese Platte von einem inneren, ebenfalls in Eisen getriebenen Rahmen, der durch eingelegte Emailfriese (rothe und blaue Bänderverzierung und grünes Epheulaub auf Silbergrund) und durch einen vergoldeten Eichenlaub-Rundstab plastisch und farblich wirkend dieselbe von dem äusseren Metallrahmen abschliesst. — Die vier Ecken des inneren Rahmens tragen freigearbeitete Cartouchen mit den Jahreszahlen der fünfmaligen Wahl zum Vereinsvorsteher. — Der äussere Rahmen, der Hauptsache nach eine Hohlkehle mit à jour gearbeiteter Laubornamentik, ist in Messing getrieben, zu oberst in der Mitte ist das Vereinssiegel in Flachrelief mit der Vereinsdevise „E pur si muove“, zu unterst eine Cartouche, ein ornamentales Monogramm des Vereines (aus den Buchstaben Ö. I. A. V. bestehend), angebracht, in Verbindung mit einer Variante der Devise (Saxa loquuntur), welche Oberbaurath Schmidt führte, „Te saxa loquuntur“. Die Rückseite, durch Metallrahmen in Felder getheilt, (siehe Profilskizze) hat als Mittelfeld eine gravirte Stahlplatte mit dem Protokollsatz der Generalversammlung und auch die Facsimile der Unterschriften des Vereinsvorstehers Prenninger und des Obmannes des Comité's Friese.

Die Tafel ruht mittelst Charnieren auf einem sammtüberzogenen, profilirten Eichenholz-Untersatz und kann in der nebenstehend skizzirten Weise aufgestellt werden. — Als Verschluss wird, sobald die Tafel niedergelegt ist, ein verschliessbarer Eichenholzdeckel darüber gestülpt, welcher oben mit dem obenerwähnten Monogramm des Vereines in Eschenholz-Intarsie geziert ist.

Die mit äusserster Sorgfalt vollbrachte Ausführung, welche wegen der kurzen Zeit, welche gegeben werden konnte, besondere Anstrengung erforderte, wurde von dem Herrn Graveur A. Batsche (die Eisenplatte mit allen Gravirungen) und der Firma Hollénbach (E. Richter) in der anerkennendsten Weise besorgt.

# Ueber Hohmann's Präcisions-Polarplanimeter.

Von **Wilhelm Tinter.**

(Mit Zeichnung auf Blatt 33.)

## Einleitung.

An Versuchen für die Construction eines Polarplanimeters, bei welchem die Bewegung der Messrolle stets auf einer und derselben künstlich geschaffenen Unterlage, ähnlich wie bei dem Linearplanimeter stattfindet, hat es nicht gefehlt.

In der mathematischen Sammlung der Lehrkanzel für praktische Geometrie der Wiener technischen Hochschule befindet sich seit 1861 ein nach den Angaben Stampfer's in der damaligen astronomischen Werkstätte von Starke in obigem Sinne ausgeführtes Instrument, welches jedoch keine weitere Verbreitung gefunden hat.

In der Neuzeit ist es das Präcisions-Polarplanimeter von dem königlichen Bauamtmann Friedrich Hohmann, ausgeführt von dem bekannten Mechaniker Coradi in Zürich, das meines Dafürhaltens wegen seiner sinnreichen Construction und wegen seiner Leistungsfähigkeit verdient, in weiteren Fachkreisen bekannt gemacht zu werden.

Wenngleich die Beschreibung, die Theorie und der Gebrauch des Instrumentes in einer jüngst vom Verfasser veröffentlichten Broschüre \*) enthalten ist und wenngleich der Hauptzweck dieser Abhandlung die Mittheilungen über die Leistungsfähigkeit derartiger Instrumente im Vergleiche zu den anderen, schon seit langer Zeit in der Praxis verwendeten Planimeter sein soll, so will ich doch der Vollständigkeit wegen die Beschreibung und das Schlussresultat der nach allgemeineren Grundsätzen als in der bezeichneten Broschüre aufgestellten Theorie dieses Instrumentes geben; ausserdem halte ich mich bei der Beschreibung an eine von mir durchgeführte Linearzeichnung, welche die einzelnen Theile unbedingt besser zur Anschauung bringt als eine perspectivische.

Bei der Construction des gewöhnlichen Polarplanimeters musste man doch trotz der Einfachheit desselben bei dem Vergleiche mit dem Linearplanimeter gewisse Nachtheile anerkennen, u. zw.:

1. Dass die Bewegungen der Messrolle auf jener Planunterlage, auf welcher die Zeichnung aufgetragen ist, manchesmal aber selbst auf Holz stattfinden, wodurch die verschiedene materielle Beschaffenheit der Unterlage auf die Bewegung der Rolle einen Einfluss nehmen muss, während bei dem Linearplanimeter die Messrolle immer auf einer und derselben Unterlage (einer mit Papier überspannten Glasscheibe) läuft.

2. Dass die Uebersetzung der rollenden Bewegung, wenn man nicht die Wirksamkeit des Apparates hinsichtlich der bei einer Polstellung zu umfahrenden Fläche einschränken will, nicht so bedeutend ist, wie bei dem Linearplanimeter, wodurch auch die Flächenangabe für eine Rollenumdrehung geringer ist und

3. dass die Verbindung der rollenden und gleitenden Bewegung ungünstiger ist, wie bei dem Linearplanimeter.

Bei dem Linearplanimeter ist das Mitführen einer verhältnissmässig grossen Masse bei dem Umfahren einer Figur als ein Nachtheil gegenüber dem Polarplanimeter anzusehen.

Was den unter 1) angeführten gegen die Polarplanimeter erhobenen Einwand betrifft, dass die materielle Beschaffenheit der Unterlage auf die Bewegung der Messrolle einen Einfluss üben müsse, so hat man denselben zwar hin und wieder erwähnt, aber man hat selbst bis in die jüngste Zeit nirgends bei den Angaben über die Genauigkeit der Polarplanimeter diesen Umstand berücksichtigt, beziehungsweise diesen Einfluss durch Beobachtungen unter verschiedenen Verhältnissen ziffermässig mitgetheilt.

Aus den von mir mit verschiedenen Instrumenten (Polarplanimeter nach Amsler, nach Miller-Starke, nach Ott und Coradi) zur Erhärtung der Leistungsfähigkeit der Planimeter angestellten Versuchen \*) haben sich folgende Thatsachen ergeben:

Die materielle Beschaffenheit der Unterlage, auf welcher sich die Rolle bewegt, übt einen Einfluss auf die Abwälzung derselben aus; es gibt sich dieses in den nach beiden Richtungen bei dem Umfahren erhaltenen Resultaten, in den Werthen des wahrscheinlichen Fehlers „Einer Beobachtung“ und in dem absoluten Werthe der gesuchten Grösse selbst zu erkennen.

Während die Daten, erhalten für Velin- und Maschinenpapier (von letzterem die glatte Seite) als Unterlage, nicht besonders von einander abweichen, ergeben sich für Lindenholz als Unterlage oft erschreckende Differenzen, welche mich bestimmten, von der Anwendung des sonst noch so sorgfältig geebneten Holzes als Unterlage für die Rolle entschieden abzurathen; ist das Papier, auf welchem die zu umfahrende Figur aufgetragen ist, von so geringer Ausdehnung, dass die Messrolle beim Umfahren der Figur nicht Platz findet, so wird man eine entsprechende Papierfläche als Unterlage ergänzend anfügen.

Für die beiden Papierarten, Velinpapier und Maschinenpapier ist der Werth des wahrscheinlichen Fehlers „Einer Beobachtung“ nahezu übereinstimmend, während die für beide Arten der Unterlage ermittelten Flächen einer und derselben Figur um mehr als den wahrscheinlichen Fehler abweichen. Wenn man aber bedenkt, dass für dieselbe Art der Unterlage wegen der Gleichförmigkeit der Materie, derselbe Reductionsfactor gelten d. i. der Werth der Fläche für eine Umdrehung die Rolle constant bleiben wird, so kann in diesem Falle einem Fehler leicht begegnet werden.

Hohmann stellte sich nun die Aufgabe, ein Polarplanimeter derart zu construiren, dass man

\*) Beschreibung, Theorie und Gebrauch des Präcisions-Planimeters (Patent Hohmann und Coradi) von Friedrich Hohmann, königlicher Bauamtmann in Bamberg. Im Selbstverlage des Verfassers.

\*) Ein Beitrag zur Kenntniss der Leistungsfähigkeit der in der Praxis hauptsächlich verwendeten Planimeter. Von Prof. Dr. Wilhelm Tinter. Wien 1877.

1. sich von dem Einflusse der etwaigen Unebenheiten der Unterlage, bedingt durch die verschiedene materielle Beschaffenheit derselben, auf die Bewegung der Messrolle möglichst frei macht;

2. die Trägheit der Messrolle durch Reduction der Massen, aber ohne die Solidität der Construction zu schädigen, verringert und

3. dass man bei Anordnung der einzelnen Theile dafür Sorge trägt, die rollenden Bewegungen der Messrolle zu den vorwiegenden und auch unabhängig von der Polstellung des Instrumentes zu der in Fläche zu bestimmenden Figur zu machen.

Die erste Forderung gedenkt *Hohmann* durch die Anwendung von zwei Rollen zu erreichen, von denen die auf der Planunterlage ruhende nur rollenden Bewegungen unterworfen ist, während für die den rollenden und gleitenden Bewegungen ausgesetzte Messrolle eine künstliche Unterlage von vollkommen gleichförmiger Glätte geschaffen wird.

Da die Messrolle hiedurch nicht mehr wie bei den gewöhnlichen Arten des Polarplanimeters als ein Stützpunkt des Instrumentes zu dienen hat, so kann der zweiten Forderung, durch Reduction der Massen die Trägheit der Messrolle zu verringern, entsprochen werden.

Der dritten Forderung kann man durch die Uebertragung der Bewegungen auf die Messrolle in ähnlicher Art wie bei dem Linearplanimeter nachkommen.

#### Beschreibung des Präcisions-Polarplanimeters.

Figur 1—4, Blatt 33.

Der Pol *P* des Instrumentes wird durch die mit dem einen Ende *A* des Leitarmes (Polarmes) *AC* verschraubte Stahlkugel, welche in das Gewicht *Q* versenkt ist, gebildet. Leitarm und Fahrarm (Führungsarm) *DE* sind durch eine verticale Achse *C* verbunden; es kann also der Fahrarm um diese Achse, Leitarm und Fahrarm können gemeinschaftlich um den Pol gedreht werden. Fig. 1 und 4.

Der Fahrarm ist röhrenförmig von quadratischem Querschnitte und zum Zwecke der Verlängerung, beziehentlich der Verkürzung in einer Hülse *H* sicher verschiebbar. An dem Ende *D* ist der verticale Fahrstift (Fahrspitze) *S* und neben demselben ein in Höhe verstellbarer am unteren Ende abgerundeter Stift *s* angebracht; letzterer soll bei richtiger Stellung das Eindringen des Fahrstiftes in die Zeichnung, wenn derselben nachgefahren wird, verhindern; er kann zu diesem Zwecke durch Verschrauben in der Hülse gehoben, beziehentlich gesenkt und durch die Schraube *K* festgehalten werden. Die obere Fläche des Fahrarmes trägt eine Millimeter-Theilung und ausserdem in bestimmten Abständen Marken, während der Index *J* zum Einstellen auf dieselben an der Hülse angebracht ist. Dadurch ist es möglich, das Instrument für bestimmte Flächenangaben adjustiren zu können. Die Klemmschraube *K* dient zum Festhalten des Fahrarmes in der Hülse und die Mikrometerschraube *M* zum scharfen Einstellen des Index *J* auf eine bestimmte Fahrarmlänge; ausserdem kann auch der Polarm in seiner Länge geändert werden.

Die Hülse geht in eine rechtwinklig zum Fahrarme gestellte Verlängerung aus, welche einen verticalen cylinder-

förmig gestalteten Stahlzapfen *L* trägt, dessen Ort durch die von der Theorie geforderte Bedingung, dass die Verticalebene, gelegt durch den Fahrstift *S* und die Drehachse *C* zu der Verticalebene, gelegt durch die Drehachse *C* und die Achse des Zapfens *L*, senkrecht stehen soll, bestimmt wird; man kann auch sagen, dass der durch Fahrstift *S*, Drehachse *C* und Achse des Zapfens *L* gebildete Winkelhebel bei *C* rechtwinklig sein soll. Dieser Forderung kann durch Correctionsschraubchen *ff'*, welche auf den Zapfen wirken, genügt werden. (Fig. 1 und 4.)

An dem Leitarme ist der zweimal durchbrochene, in seiner Form aus der Zeichnung ersichtliche Theil *gghh* befestiget, welcher einerseits zur Aufnahme der geneigten Achse *FG*, andererseits zur Aufnahme des Schlittens *VW* und der damit in Verbindung stehenden Messrolle *R<sub>m</sub>* dient.

Die Achse *FG* trägt senkrecht und centrisch zu ihr an dem äusseren Ende die Laufrolle *R<sub>1</sub>* und an dem inneren Ende die mit glattem Papier überzogene der Messrolle *R<sub>m</sub>* als Unterlage dienende Scheibe *O*; diese Achse liegt in der Verticalebene des Leitarmes. Der Berührungspunkt *B* der Laufrolle mit der Unterlage bildet einen Stützpunkt des Instrumentes und um den Druck hierauf zu vermindern, sind an einer bei *Z* befestigten, entsprechend stark gehaltenen Feder *T* zwei kleine Rollen *r, r'* angebracht, deren Achsen zum Pole centrisch gestellt sind.

Die Verbindung der Messrolle mit den anderen Instrumenttheilen ist auf folgende Weise hergestellt. Ein trapezförmiger Schlitten *VW* (Fig. 1, 2, 3) ist in den Ausschnitten der beiden seitlich angeschraubten Stahlplatten *p, p'* beweglich; an dem Schlitten sind zwei senkrecht zu demselben gestellte Cylinder *ii'* aus Stahl angebracht, u. zw. der eine *i* fest, während der zweite *i'* auf einer entsprechend starken am Schlitten verschraubten Feder *t* aufgesetzt ist; der Zapfen *i* findet überdies auf einer horizontalen an *gg* befestigten Stahllamelle *p<sub>1</sub> p'<sub>1</sub>* eine Führung. Zwischen zwei Schraubenspitzen *qq'* ist ein Rahmen *uu'* gehalten, in welchem zwischen Körnern *q<sub>1</sub> q'<sub>1</sub>* die horizontale Drehachse *hh'* der mit dieser senkrecht verbundenen Messrolle *R<sub>m</sub>* eingelagert ist. Der Rahmen *uu'* hat gegen die Scheibe *O* ein kleines Uebergewicht, welches ein gleichförmiges Anpressen der Messrolle gegen die Scheibe sichert. Die Führungsebene für den Schlitten und die Achse der Zählrolle stehen senkrecht zur Verticalebene der Laufrollenachse.

Denkt man sich jetzt den Schlitten derart eingesetzt, dass der Zapfen *L* des Fahrarmes zwischen die beiden Cylinder *ii'* zu stehen kommt, so ist die Verbindung zwischen Schlitten *VW* und Fahrarm *SC* hergestellt. Die Achse des Zapfens *L* liegt in der Verlängerung der Mittelebene der Zählrolle *R<sub>m</sub>*; wenn demnach der Fahrarm senkrecht zum Leitarme gestellt ist, so wird auch die Zählrolle in der Verticalebene des Leitarmes und nach dem früher Gesagten ihr Berührungspunkt mit der Scheibe in dem Durchmesser liegen müssen, welcher sich durch den Schnitt der Scheibe mit der durch die Laufrollenachse gelegten Verticalebene ergibt; in den ausgeführten Exemplaren fällt der Berührungspunkt der Messrolle mit der Mitte der Scheibe zusammen.

einer Umdrehung.

Einfachheit nur Eintrag thun würde. \*)

Bewegungen vollziehen kann.

kleine Drehungen der Messrolle statthaben.

der letzteren die Messrolle keine Bewegung machen.

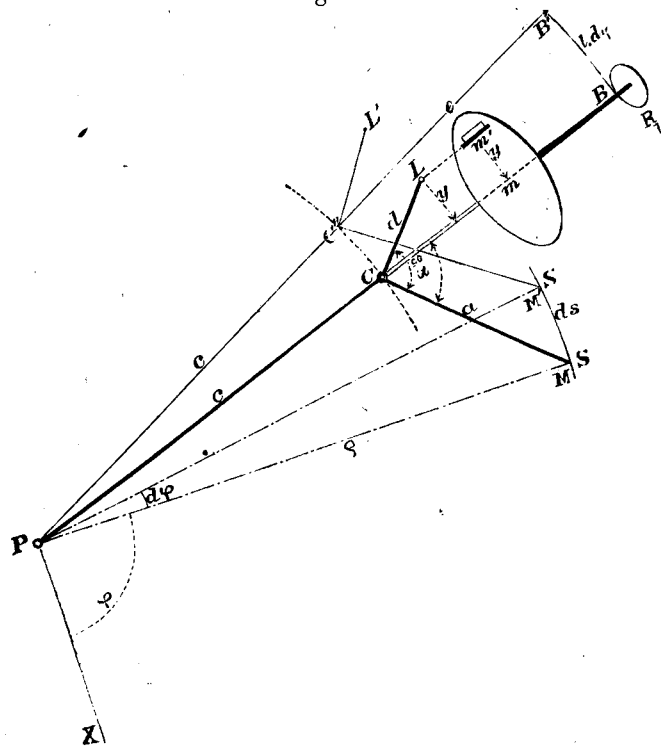
theils rollende Bewegungen der Messrolle auf.

## Text-Figur A.

**Präcisions-Polarplanimeter gemacht.**

### Polarachse.

Fig. A.



Ferner sei:

- $R$  der Halbmesser der Messrolle.

zweiter Ordnung, bezüglich von jenen Gliedern absieht,

welche schliesslich bei der Integration innerhalb der hier vorkommenden Grenzen entfallen, auch  $\angle B P B'$  gleich gesetzt werden kann.

Es stehen folgende Gleichungen:

$$R' \cdot d\psi = l d\varphi \dots\dots\dots 1)$$

$$y \cdot d\psi = R \cdot dv \dots\dots\dots 2)$$

$$y = d \cdot \cos \alpha \dots\dots\dots 3)$$

Durch Elimination von  $y$  und  $d\psi$  kommt:

$$\frac{R \cdot R'}{l \cdot d} \cdot dv = \cos \alpha \cdot d\varphi \dots\dots\dots 4)$$

Aus  $\triangle SPC$  folgert sich:

$$\cos \alpha = \frac{\rho^2}{2ac} - \frac{a^2 + c^2}{2ac} \dots\dots\dots 5)$$

und hiemit kommt statt 4)

$$R R' \cdot \frac{a \cdot c}{l \cdot d} dv = \frac{\rho^2}{2} d\varphi - \frac{a^2 + c^2}{2} d\varphi \dots\dots 6)$$

Integriert gibt:

$$R \cdot R' \cdot \frac{a \cdot c}{l \cdot d} \int dv = \int \left( \frac{\rho^2}{2} d\varphi - \frac{a^2 + c^2}{2} d\varphi \right) \dots\dots 7)**$$

Unterscheidet man die beiden Stellungen des Poles zu der Figur, deren Fläche bestimmt werden soll, nämlich: Pol ausserhalb und Pol innerhalb, so erkennt man zunächst, dass für beide Fälle  $\int \frac{\rho^2}{2} d\varphi$  die Fläche  $F$ , bezogen auf Polarkoordinaten, darstellt; weiter hat man:

\*\*) Anmerkung. Nimmt man allgemein den Winkel zwischen dem Fahrarm  $SC$  und dem kurzen Hebelarm  $CL$  d. i.  $\angle LCS = \beta$  von  $90^\circ$  verschieden an, so bleiben die Gleichungen 1) und 2), an Stelle von 3) und 4) kommt:

$$y = d \sin(\beta - \alpha) \dots\dots\dots 3_1)$$

$$\frac{R \cdot R'}{l \cdot d} dv = \sin(\beta - \alpha) d\varphi \dots\dots\dots 4_1)$$

$$\text{oder: } \frac{R \cdot R'}{l \cdot d} dv = \sin \beta \cos \alpha d\varphi - \cos \beta \sin \alpha \cdot d\varphi \dots\dots 4_2)$$

Da nun ist:

$$\cos \alpha = \frac{\rho^2}{2ac} - \frac{a^2 + c^2}{2ac}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2ac} \sqrt{4a^2c^2 - (\rho^2 - a^2 - c^2)^2}$$

so wird 4\_2)

$$R \cdot R' \cdot \frac{a \cdot c}{l \cdot d} dv = \sin \beta \cdot \frac{\rho^2}{2} \cdot d\varphi - \sin \beta \cdot \frac{a^2 + c^2}{2} d\varphi - \frac{1}{2} \cos \beta \sqrt{4a^2c^2 - (\rho^2 - a^2 - c^2)^2} \cdot d\varphi \dots\dots 6_1)$$

Dieses letzte Glied spricht die Möglichkeit der Integration unter der Bedingung aus, dass die Gleichung der Curve für eine bestimmte Lage des Poles bekannt sei, was aber selten der Fall sein wird. Selbst aber angenommen, dass die Polargleichung der Curve bekannt wäre, wird es noch immer mancher Schwierigkeit unterliegen, den mathematischen Pol des Instrumentes über den Pol zu stellen, auf welchen die Gleichung der Curve bezogen wurde. Man macht sich aber von beiden Bedingungen, nämlich der Kenntniss der Polargleichung der Curve und von der bestimmten Polstellung des Instrumentes unabhängig, wenn man die vom Mechaniker leicht zu erfüllende Forderung stellt, dass der kurze Hebelarm  $LC$  zum Führungsarme  $CS$  senkrecht steht, dass also  $\angle LCS = \beta = 90^\circ$  werde; es ist dann  $\sin \beta = 1$ ,  $\cos \beta = 0$  und Gleichung 6\_1) geht in folgende über:

$$R \cdot R' \cdot \frac{a \cdot c}{l \cdot d} dv = \frac{\rho^2}{2} d\varphi - \frac{a^2 + c^2}{2} d\varphi \dots\dots 6_1'),$$

also identisch mit 6), wodurch die bei der Beschreibung aufgestellte Forderung gerechtfertigt ist.

a) für Pol ausserhalb den Werth des bestimmten Integrales  $\int d\varphi = 0$ , und  $\int dv = v$ , mithin kommt:

$$R \cdot R' \cdot \frac{a \cdot c}{l \cdot d} \cdot v = F \dots\dots\dots 8)$$

Bezeichnet man die Fläche, welche durch das Instrument für „Eine Rollenumdrehung“ d. i. für  $v = 2\pi$  angegeben wird mit  $f$ , also

$$f = R R' \cdot \frac{a \cdot c}{l \cdot d} 2\pi \dots\dots\dots 9)$$

und mit  $A$  die Anzahl Rollenumdrehungen bei dem Umfahren einer beliebig begrenzten Figur, so hat man schliesslich

$$F = f \cdot A \dots\dots\dots 10)$$

b) für Pol innerhalb ist der Werth des bestimmten Integrales  $\int d\varphi$  zwischen den Grenzen  $\varphi$  und  $\varphi + 2\pi$  zu

nehmen, also ist  $\int_{\varphi}^{\varphi + 2\pi} d\varphi = 2\pi$  und Gleichung 7) geht mit

Rücksicht auf 7–10) über in:

$$f \cdot A = F - (a^2 + c^2) \pi \dots\dots\dots 11)$$

Die Grösse  $(a^2 + c^2) \pi$  stellt die Fläche jenes Kreises dar, welchen die Fahrspitze bei dem Drehen um den Pol beschreibt, wenn der Fahrarm zu den Leitarm senkrecht steht; bezeichnet man diese constante Fläche des Kreises vom Halbmesser  $r = \sqrt{a^2 + c^2}$  für bestimmte Längen  $a$  und  $c$  mit  $C$ , so kommt schliesslich:

$$F = f \cdot A + C \dots\dots\dots 12)$$

Der Kreis vom Halbmesser  $r = \sqrt{a^2 + c^2}$  wurde von Hohmann der Ordinatekreis genannt; man erkennt hiernach, dass sowohl bei Pol ausserhalb als auch bei Pol innerhalb durch das Instrument mit dem Werthe  $f \cdot A$  jene Fläche gegeben wird, welche zwischen der Begrenzung der gegebenen Figur und dem Ordinatekreis liegt.

Hat man also eine Figur bei Pol innerhalb umfahren, so muss man darauf noch Rücksicht nehmen, ob 1. die Figur ganz ausserhalb, 2. ganz innerhalb oder 3. theils ausserhalb, theils innerhalb des Ordinatekreises liegt.

Zu 1. In diesem Falle ist zu der Constanten  $C$  die Angabe des Apparates  $f \cdot A$  zu addiren; denn es ist nun  $\angle \alpha < 90^\circ$ ,  $\cos \alpha$  positiv, welche Bedingung aber der Ableitung der Gleichungen von 5–12 zutrifft.

Zu 2. Hierbei ist von der Constanten  $C$  die Angabe des Apparates zu subtrahiren, denn für diesen Fall ist  $\alpha > 90^\circ$ ,  $\cos \alpha$  negativ und Gleichung 5) wird

$$\cos \alpha = -\frac{\rho^2}{2ac} + \frac{a^2 + c^2}{2ac} \dots\dots\dots 5)$$

statt der Integralgleichung 7) kommt:

$$R R' \cdot \frac{a \cdot c}{l \cdot d} \int dv = -\int \left( \frac{\rho^2}{2} d\varphi + \frac{a^2 + c^2}{2} d\varphi \right) \dots\dots 7)$$

und statt 11)

$$f \cdot A = -F + (a^2 + c^2) \pi \dots\dots\dots 11')$$

Somit ist nunmehr:

$$F = C - f \cdot A \dots\dots\dots 12')$$

Zu 3. Liegt die Figur, welche man bei Pol innerhalb zu umfahren hat, theils innerhalb theils ausserhalb des Ordinatekreises, so kann entweder die Angabe des Appa-

rates zur Constanten zu addiren oder von derselben zu subtrahiren kommen; es kann aber auch hier kein Zweifel entstehen, wenn man die Figur in dem Sinne umfährt, in welchem die Lesungen an der Rolle zunehmen; ist die Endlesung grösser als die Ausgangslesung, so ist die Differenz (Angabe des Apparates) zur Constanten zu addiren, im Gegentheile zu subtrahiren.

**Die Genauigkeit der mit dem Präcisions-Polarplanimeter erhaltenen Resultate im Zusammenhange mit der Prüfung der Eigenschaften desselben.**

Die Genauigkeit der Angaben eines jeden Planimeters ist unter Voraussetzung der möglichst genauen mechanischen Ausführung der an das Instrument gestellten Eigenschaften abhängig: 1. Von der Fläche, welche „Einer Umdrehung“ der Messrolle entspricht und 2. von der Genauigkeit, mittelst welcher der Fahrstift dem Umfange einer gegebenen Figur nachgefahren wird.

Zu 1. Wenn man den Fall: Pol des Instrumentes ausserhalb des Umfanges der in Fläche zu bestimmenden Figur im Auge behält, so ist nach Gleichung 8)

$$F = R R' \frac{a \cdot c}{l \cdot d} \cdot v \dots\dots\dots 8)$$

Verlangt man, dass Einer Umdrehung der Messrolle d. i. für  $v = 2\pi$  die Fläche  $f$  entsprechen soll, so wird, da nun

$$f = R \cdot R' \cdot \frac{a \cdot c}{l \cdot d} \cdot 2\pi \dots\dots\dots 9)$$

ist, dieser Forderung leicht nachzukommen sein, indem von den Grössen  $R, R', a, c, l, d$  fünf derselben angenommen werden können, während sich die noch fehlende aus der Gleichung 9) bestimmt; hiebei muss man aber wegen der Ausmittlung der Bruchtheile einer Umdrehung der Messrolle für  $R$  einen nicht zu kleinen Werth wählen oder wenn derselbe unter Annahme der übrigen Grössen aus Gleichung 9) gerechnet würde, müssten die betreffenden Grössen so gewählt werden, dass  $R$  nicht zu klein ausfalle.

Von Seite des Mechanikers werden gewöhnlich, die Grössen  $R, R', c, l$  und  $d$  gewählt und hiemit für das gegebene  $f$  die Fahrarmlänge  $a$  gerechnet.

An dem mir zur Untersuchung zu Gebote stehenden Instrumente ist sehr nahe  $R = 0.94^{\text{cm}}, R' = 1.4^{\text{cm}}, c = 25.0^{\text{cm}}, l = 35.3^{\text{cm}}, d = 4.0^{\text{cm}}$ ; der Fahrarm trägt ausser der Millimeter-eintheilung vier Marken, welche, wenn man von dem angegebenen Verjüngungsverhältnisse absieht, die Fahrarmlängen bestimmen sollen, welche eingehalten werden müssen, wenn einer Umdrehung der Messrolle beziehentlich die Fläche von 10, 20, 30, 40  $\square^{\text{cm}}$  entsprechen soll.

Mit Rücksicht auf die oben angegebenen Werthe erhält man nach 9)

$$\begin{array}{lcl} \text{für } f = 10 \square^{\text{cm}} & \dots\dots\dots & a = 6.83^{\text{cm}} \\ 20 & & = 13.66 \\ 30 & & = 20.49 \\ 40 & & = 27.31 \end{array} \dots\dots 13)$$

Für die Fahrarmlänge  $a = 6.83^{\text{cm}}$ , entsprechend der Fläche von 10  $\square^{\text{cm}}$  für eine Rollenumdrehung, wird das Instrument nicht gut angewendet werden können, indem das Uebergewicht des anderen Theiles des Fahrarmes die Aequi-

librirung des Instrumentes stört und ohne besondere Massnahmen die beim Beobachten geforderte Lage desselben nicht erhalten werden kann.

Wenn man dann die nächste Fahrarmlänge  $a = 13.66$ , für welche die einer Umdrehung der Messrolle entsprechende Fläche  $= 20 \square^{\text{cm}}$  gilt, in Betracht zieht, so ist die Gesamtlänge des Fahrarmes zu beiden Seiten der Drehachse ziemlich gleich vertheilt, was für die Anwendung vorthellhaft ist. Mit Hilfe des an diesem Instrumente besonders gut getheilten Nonius, dessen Angabe  $\frac{1}{1000}$  des Umfanges der Rolle ist, kann für den Fall als ein genau coincidirender Strich nicht gefunden wird, die Stellung des Nullstriches des Nonius mindestens auf 0.5 der Angabe d. i. bis auf 50.000 des Umfanges bestimmt werden; ein im Ablesen von Nonien vertrauter Beobachter wird hierin noch weiter (auf 0.0003 des Umfanges) kommen können. Die Anzahl der zur Ermittlung der Fläche  $F$  nöthigen Rollenumdrehungen  $A$  (Gleichung 10) ergibt sich aus der Differenz der Lesungen am Anfange und am Ende des Umfahrens der Figur; es wird also der Fehler der Grösse  $A$ , wenn man lediglich den Lesefehler an der Messrolle in Betracht zieht und denselben für die Lesung am Anfange und am Ende des Umfahrens gleich annimmt, zu  $0.0005 \sqrt{2} = 0.0007$  des Umfanges der Rolle, oder mit Rücksicht, dass die einer Umdrehung der Rolle entsprechende Fläche  $20 \square^{\text{cm}}$  ist, zu  $0.014 \square^{\text{cm}}$  angenommen werden können.

Bei dem Polarplanimeter nach Amsler oder nach Miller-Starke ist für die gewöhnliche Fahrarmlänge die einer Rollenumdrehung entsprechende Fläche  $100 \square^{\text{cm}}$ ; man wird also unter Voraussetzung gleich genauer Ablesung des Standes des Nonius an der Messrolle, wie bei dem Präcisionsplanimeter, die Grösse  $A$  auch auf 0.0007 des Umfanges oder in Fläche auf  $0.07 \square^{\text{cm}}$ , soweit nur der Lesefehler in Betracht kommt, bestimmen können. Bei dem Linearplanimeter Wetli-Starke ist die Fläche für eine Rollenumdrehung  $10 \square^{\text{cm}}$ ; die Stellung des Index an dem Umfange der in 100 gleiche Theile getheilten Trommel kann gut auf  $\frac{1}{1000}$  des Umfanges d. i. auf  $0.01 \square^{\text{cm}}$  angegeben werden, wodurch sich der Fehler in der Grösse  $A$ , wenn man wieder nur den Lesefehler in Betracht zieht, mit  $0.01 \sqrt{2} = 0.014 \square^{\text{cm}}$  ergibt.

Würde man bei dem Linearplanimeter Wetli-Starke einen Nonius anbringen (die neueste Construction von G. Starke lässt dieses ohne Umstände zu), so könnte dieser Fehler in der Grösse  $A$  leicht auf  $0.007 \square^{\text{cm}}$  herabgebracht werden.

Nach den vorangestellten Bemerkungen ist also das Verhältniss der Angabe des Präcisions-Polarplanimeters zu dem Polarplanimeter gewöhnlicher Construction und zu dem Linearplanimeter gegeben; man erkennt hieraus, dass das Präcisions-Polarplanimeter schon aus diesem Grunde eine fünfmal genauere Angabe der Fläche gegenüber dem Polarplanimeter gewöhnlicher Construction gewährt und dass es mit dem Linearplanimeter in seiner bisherigen Construction in dieser Hinsicht gleich steht.

Zu 2. Man wird zur Kenntniss über den Fehler, welcher begangen wird, dass man dem Umfange einer gegebenen Figur nicht vollkommen genau nachfahren kann, gelangen, wenn



man ausser den Figuren, welche auf Probeplatten vorgerissen oder durch Probe- (Control-) Lineale ganz bestimmt sind, welche also den Weg für die Fahrstiftspitze ausser allen Zweifel stellen, auch andere auf dem Papiere gezeichnete Figuren nachfährt; die Uebereinstimmung der Resultate, beziehungsweise der Fehler, welcher einer Beobachtung zukommen, wird zu dem Schlusse über die Genauigkeit, welche bei dem Umfahren der Figuren zu erreichen ist, berechtigen. Wenngleich dieser Fehler für den betreffenden Beobachter gelten wird, so ist es doch wünschenswerth, Angaben hierüber zu erhalten, um die Grenzen kennen zu lernen, innerhalb welcher sich derartige Fehler überhaupt bewegen können.

Die Untersuchungen mit dem mir zu Gebote stehenden Präcisions-Polarplanimeter Nr. 22 bezogen sich auf folgende Punkte:

I. Ob der Winkel zwischen Fahrspitze  $S$ , Drehungspunkt  $C$  des Fahrarmes und Mittelpunkt des Zapfens  $L$  ein Rechter ist.

II. Ob dieser Winkel ein Rechter bleibt, wenn der Fahrarm in der Hülse verschoben wird.

III. Ob bei dem rechtsseitigen wie bei dem linksseitigen Umfahren einer und derselben Figur die Abwicklungen (Angaben) der Messrolle gleich gross sind.

IV. Ob die Länge des Fahrarmes, welche dem gegebenen Werthe der Fläche für eine Rollenumdrehung zukommen soll, auch richtig angegeben ist.

V. Welchen Einfluss die materielle Beschaffenheit der Unterlage auf die Bewegung der Laufrolle, beziehentlich der Messrolle ausübt.

Zum Schlusse folgt die Ableitung des Grades der Genauigkeit der Ermittlung der Flächen durch Umfahren beliebig begrenzter Figuren mittelst des Präcisions-Polarplanimeters.

Ehe ich die einzelnen Punkte näher bespreche, muss ich noch erwähnen, dass die Unterlage für das Planimeter immer horizontal gestellt war, dass ich das Umfahren der Figur mit der Fahrstiftspitze an einer Stelle begonnen habe, für welche die Bewegung der Messrolle Null ist, und dass das Umfahren selbst mit grösster Sorgfalt vollzogen worden ist. Zur Untersuchung für die unter I—V ausgesprochenen Eigenschaften wurden nur Probeplatten und das Control-Lineal verwendet.

In den Tabellen  $A$ ,  $B$  sind die Resultate aus den Beobachtungen sammt den näheren zur Schlussfolgerung nöthigen Daten übersichtlich zusammengestellt; der angegebene Fehler ist der wahrscheinliche Fehler „Einer Beobachtung“.

Ad. I. Der Einfluss eines Fehlers in der geforderten Eigenschaft äussert sich dadurch, dass das Resultat von der Stellung des Poles zu der in Fläche zu bestimmenden Figur abhängig wird. Umfährt man daher bei einer entsprechenden Fahrarmlänge ein und dieselbe Figur bei Pol nahe und Pol entfernt, aber in beiden Fällen in demselben Sinne, so müssen bei erfüllter Forderung die Resultate für die beiden Polstellungen innerhalb der früher in 1. angegebenen Fehlergrenzen liegen.

Ist das Resultat bei Pol nahe grösser oder kleiner als jenes bei Pol entfernt, so ist der genannte Winkel zu

gross beziehentlich zu klein. Mit Hilfe der Corrections-schraubchen  $ff'$  (Fig. 4) kann dieser Fehler corrigirt werden.

Für die Fahrarmlänge  $13.66^m$  wurde die Untersuchung über diese Eigenschaft durchgeführt, und wie die Resultate in Nr. 1 und 2, 3 und 4 Tabelle  $A$  zeigen, kann diese Eigenschaft als erfüllt angesehen werden.

Ad II. Wird nun, nachdem die unter I. geforderte Eigenschaft für eine gewisse Fahrarmlänge verbürgt werden kann, der Fahrarm in der Hülse verschoben und in dieser neuen Stellung ein und dieselbe Figur wieder bei Pol nahe und bei Pol entfernt umfahren, so müssen die diesen beiden verschiedenen Polstellungen entsprechenden Resultate innerhalb der durch den Lesefehler bedingten Grenzen übereinstimmen; würden sich grössere Abweichungen ergeben, so ist entweder die Führung des Fahrarmes in der Hülse nicht richtig oder es ist der Fahrarm nicht geradlinig. In beiden Fällen kann nur der Mechaniker abhelfen, wenn man eben bei verschiedenen Längen des Fahrarmes den Apparat richtig verwenden wollte.

Aus den Resultaten der Versuche Nr. 5 und 6 für die Fahrarmlänge  $20.49^m$  ergibt sich, dass das Instrument auch in dieser Hinsicht vollkommen genannt werden kann.

Ad III. Die Forderung, dass die Angaben der Messrolle bei dem rechtsseitigen wie bei dem linksseitigen Umfahren einer und derselben Figur gleich sein sollen, ist eine solche, welche bei den verschiedenen Constructionen der Planimeter nur mehr oder weniger vollkommen zu erreichen ist.

Um bei dem Präcisions-Polarplanimeter zu erkennen, in wie weit dieser Forderung Rechnung getragen worden ist, sind die Figuren sowohl rechtsseitig als linksseitig umfahren worden, also in dem Sinne, in welchem die Lesungen an der Messrolle zunehmen, und in jenem, in welchem sie abnehmen u. zw. in regelmässiger Aufeinanderfolge. Die Resultate der Versuchsreihen 7, 10, 13, 16, 18, ferner 8, 11, 14, 17, 19 zeigen auch bei diesem Instrumente Differenzen, welche weit ausser jenen Grenzen liegen, die durch die Angabe des Nonius, beziehentlich durch den Lesefehler bedingt sind, u. zw. ist der Mittelwerth der Resultate bei dem linksseitigen Umfahren durchwegs grösser als der Mittelwerth aus den Resultaten bei dem rechtsseitigen Umfahren.

Eine Abhängigkeit des Werthes dieser Differenz von der Fläche, bezüglich von der Anzahl der Umdrehungen der Messrolle ist nicht anzugeben.

Eine von den Fehlerquellen für diesen constanten Fehler glaube ich an dem untersuchten Instrumente in der nicht möglichen Aequilibrirung des Schlittens in allen seinen Stellungen suchen zu sollen. Bei Besprechung des Punktes IV werde ich auf diese Differenz nochmals zurückkommen.

Nimmt man aus je einem Resultate beim rechtsseitigen und linksseitigen Umfahren das Mittel, so erhält man Werthe, welche vollkommen befriedigend genannt werden müssen. Siehe in den vorhin bezeichneten Versuchsreihen die mit  $\frac{1}{2}(l+r)$  überschriebenen Werthe, welche nur innerhalb der durch den Lesefehler gebotenen Grenzen abweichen.

Ad IV. Was die Richtigkeit der am Fahrarme angegebenen Marken betrifft, so habe ich mich in Vollständigkeit nur auf die Untersuchung des richtigen Ortes jener Marke

beschränkt, für welche in dem Verjüngungsverhältnisse 1:1000 der Werth der Noniuseinheit mit  $20^{\square\text{mm}}$  angegeben ist; sieht man von dem Verjüngungsverhältnisse ab, so soll für die durch diese Marke bestimmte Fahrarmlänge die Einer Umdrehung der Messrolle entsprechende Fläche  $20^{\square\text{cm}}$  sein. Aus dem Umfahren der Probenplatten  $K_1$ ,  $K_2$  und der durch das Control-Lineal für den Halbmesser 5 und  $9^{\text{cm}}$  bestimmten Kreise hat sich aus den vier gut übereinstimmenden Resultaten im Mittel ergeben, dass für die vom Mechaniker bezeichnete Fahrarmlänge der Werth der Fläche, welcher Einer Umdrehung der Messrolle entspricht  $19.9851^{\square\text{cm}}$  ist, demnach von dem geforderten Werthe  $20.0000^{\square\text{cm}}$  um  $0.0149^{\square\text{cm}} = 1.49^{\square\text{um}}$  abweicht.

Um die Abhängigkeit des Fehlers in der Fläche  $f$  für Eine Umdrehung der Messrolle von der Länge  $a$  des Fahrarmes zu erhalten, gehe man von der Gleichung 9) nämlich

$$f = R R' \cdot \frac{a \cdot c}{l \cdot d} 2\pi$$

aus, und differenzire nach  $a$  und  $f$ ; es kommt

$$df = \frac{R R' \cdot 2\pi}{d} \cdot \frac{c}{l} \cdot da \dots\dots\dots 14)$$

oder 
$$\frac{df}{f} = \frac{da}{a} \dots\dots\dots 15)$$

Ist der Fehler in der Fläche  $f$ , d. i.  $df$  gegeben, so lässt sich hiezu der Fehler in  $a$ , d. i.  $da$  mit Hilfe vorstehender Gleichungen rechnen.

Gleichung 15) sagt überdies, dass das Fehlerverhältniss in der Fläche jenem der Fahrarmlänge gleich sein muss, oder wenn verlangt wird, dass die Fläche bis auf den  $n$ ten Theil genau sein soll, so muss auch die Fahrarmlänge bis auf den  $n$ ten Theil ihrer Länge genau sein.

Bei dem in Untersuchung gezogenen Instrumente ist  $R = 0.94$ ,  $R' = 1.40$ ,  $c = 25.00$ ,  $l = 35.30$ ,  $d = 4.00^{\text{cm}}$ ; mithin wird mit diesen Zahlen Gleichung 14)

$$df = 1.464 \cdot da \dots\dots\dots 14')$$

und 
$$da = \frac{df}{1.464}$$

Nun ist  $df = 0.0149^{\square\text{cm}}$  gefunden worden, daher

$$da = 0.0102^{\text{cm}} = 0.102^{\text{mm}}$$

Der Fehler in der Fahrarmlänge von nur  $0.10^{\text{mm}}$  bringt in der Einer Rollenumdrehung entsprechenden Fläche schon einen Fehler von  $0.0149^{\square\text{cm}} = 1.5^{\square\text{mm}}$  hervor.

Nach Gleichung 15) ist

$$da = \frac{df}{f} \cdot a$$

Man hat:

$$df = 1.49^{\square\text{mm}}, f = 20.00^{\square\text{cm}} = 2000^{\square\text{mm}}, a = 13.66^{\text{cm}}$$

und hiermit: 
$$da = \frac{1}{1342} \cdot a = 0.0102^{\text{cm}} = 0.10^{\text{mm}}.$$

Es würde hieraus hervorgehen, dass die Fahrarmlänge bis auf  $0.10^{\text{mm}}$  von dem Mechaniker gut bestimmt worden ist; allein da man bei dem Einstellen auf die Marke, wenngleich nur die Coincidenz des Index mit dieser herzustellen ist, auch einen Fehler von  $0.02^{\text{mm}}$  machen wird, so kann man annehmen, dass im vorliegenden Falle die Fahrarmlänge so weit sicher bestimmt wurde, dass der Einer Umdrehung der Messrolle entsprechenden Fläche anhaftende Fehler nur  $\frac{1}{1700}$  derselben betragen dürfte.

In der Praxis wird man selbstverständlich nach Herstellung der Coincidenz zwischen Index und entsprechender Marke am Fahrarme mit Hilfe der Probescheibe oder des guten Control-Lineales die Fläche ermittelt, welche Einer Umdrehung der Messrolle entspricht, und dieselbe für die Flächenbestimmung der ganzen Figur anwenden.

Denn ist  $df$  der Fehler in  $f$  (einer Rollenumdrehung entsprechend), so ist, wenn sich die Anzahl der Rollenumdrehungen bei dem Umfahren einer Figur mit  $A$  ergibt, die Fläche  $F = f \cdot A$  fehlerhaft um

$$dF = A \cdot df \dots\dots\dots 16)$$

oder 
$$\frac{dF}{F} = \frac{df}{f} = \frac{da}{a} \dots\dots\dots 17)$$

Die Gesamtfläche ergibt sich also in demselben Verhältnisse genau, in welchem der Fehler die Fläche in Einer Rollenumdrehung zu dieser steht.

Von Seite des mechanischen Institutes Coradi werden auch Präcisions-Polarplanimeter nach Hohmann mit veränderlichem Leitarme (Polarme) ausgeführt, so dass an derartigen Instrumenten sowohl Fahrarm als Leitarm verlängert und verkürzt werden können.

Da nun die Grösse  $f$  nach Gleichung 9) auch von der Länge des Leitarmes  $c$  abhängt, so könnte die Richtigstellung für einen Fehler in  $f$  auch mit Veränderung in der Länge von  $c$  geschehen. Die Länge  $l$  setzt sich aber zusammen aus  $c$  und dem Abstände  $e$  der Drehachse  $C$  bis zu dem Berührungspunkte  $B$  der Laufrollenachse, so dass  $l = c + e$  ist; Gleichung 9) wird:

$$f = R R' \cdot \frac{a \cdot 2\pi}{d} \cdot \frac{c}{c + e} \dots\dots\dots 9)$$

Nach  $f$  und  $c$  differenzirt, gibt:

$$df = R R' \cdot \frac{a}{d} 2\pi \cdot \frac{e}{(c + e)^2} dc \dots\dots\dots 18)$$

und 
$$\frac{df}{f} = \frac{e}{c + e} \cdot \frac{dc}{c} \dots\dots\dots 19)$$

oder nach Einführung der Zahlengrössen

$$df = 0.233 dc \dots\dots\dots 18')$$

$$\frac{df}{f} = 0.292 \frac{dc}{c} \dots\dots\dots 19')$$

Vergleicht man die Gleichung 18') mit jener 14'), so erkennt man sofort die bedeutende Verschiedenheit in den Werthen  $da$  und  $dc$ , wenn man einen und denselben Fehler  $df$  in  $f$  entweder durch Verändern der Fahrarmlänge  $a$  oder durch Verändern des Leitarmes  $c$  corrigiren wollte. Es ergibt sich unter Voraussetzung gleichen Werthes  $df$  das Verhältniss  $da : dc$  durch

$$1.464 \cdot da = 0.233 dc$$

oder durch die Proportion:

$$da : dc = 0.233 : 1.464 = 1 : 6.28 \dots\dots\dots 20)$$

oder 
$$dc = 6.28 da \dots\dots\dots 20')$$

d. h. das Maass der Verschiebung am Leitarme ist  $6\frac{1}{4}$  mal grösser als jenes am Fahrarme für das Corrigiren eines Fehlers in der Fläche, so zu einer Rollenumdrehung gehört; man kann also auch noch Correctionen am Leitarme vornehmen, wenn schon die Aenderungen der Länge des Fahrarmes so gering sind, dass sie an diesem kaum mehr weggebracht werden können.



Ist wieder  $df = 1.49 \square^{mm}$  und sollte jener Fehler in der Leitarmlänge  $c$  bestimmt werden, durch welchen  $df$  hervorgebracht wird, so folgt nach Gleichung 18)

$$dc = \frac{df \square^{cm}}{0.233} = 0.064^{cm} = 0.64^{mm},$$

sowie es auch Gleichung 20) fordert.

Zu bemerken käme noch, dass wenn die aus Versuchen für Eine Umdrehung der Messrolle bestimmte Fläche grösser oder kleiner ist als jene Fläche, welche man hierfür verlangt, und die Correction, um auf diese Fläche zu kommen, vorgenommen werden sollte, dieses durch Verkürzen, bezüglich Verlängern des Fahrarmes oder, wenn man wollte, des Leitarmes um die betreffenden Grössen geschehen könnte.

Ad V. Wenn gleich die Messrolle stets auf derselben Unterlage läuft, so ist das bei der Laufrolle, welcher bei diesem Instrumente eine wichtige Aufgabe zugetheilt ist, doch nicht der Fall. Wird auch ein Beobachter, dem die beim Gebrauche der Planimeter zu berücksichtigenden Umstände bekannt sind, nur Papier als Unterlage für die Laufrolle wählen, so habe ich doch die Untersuchung in dieser Beziehung auch auf Lindenholz als Unterlage ausgedehnt; von den Papierarten verwendete ich Velin- und Maschinenpapier. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in den Nummern 7—27 Tabelle B enthalten. (Velinpapier V. P., Maschinenpapier M. P., Lindenholz Lh.)

Während die Differenz der Resultate (Mittelwerthe) bei dem rechtsseitigen und dem linksseitigen Umfahren für Velin- und Maschinenpapier nicht wesentlich von einander abweichen (im Mittel 0.0034 gegen 0.0043) ist dieselbe bei Lindenholz als Unterlage grösser.

Tabelle A.

Nummer	1	2	3	4	5	6
Figur	$K_1$		$K_2$		$K_3$	
Pol	nahe	entfernt	nahe	entfernt	nahe	entfernt
Richtung $r$	2.4626	2.4630	6.6350	6.6333	1.4905	1.4900
"	621	650	50	35	4900	4907
"	637	630	45	45	4875	4910
"	637	630	35	35	4915	4908
"	630	640	40	50	4920	4903
"	2.4629	2.4625	6.6340	6.6340	1.4905	1.4905
"	2.4658	2.4635	6.6365	6.6365	1.4900	1.4930
"	662	80	60	75	4945	4928
"	677	80	70	80	4935	4920
"	663	75	60	80	4950	4922
"	662	85	65	65	4945	4920
"	2.4660	2.4670	6.6365	6.6365	1.4950	1.4925
Mittel aus $r$	2.4630	2.4634	6.6343	6.6345	1.4905	1.4905
Wahrsch. F.d.M.	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0003$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0004$	$\pm 0.0001$
Mittel aus $l$	2.4664	2.4679	6.6364	6.6372	1.4937	1.4924
Wahrsch. F.d.M.	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0001$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0001$
Mittel aus $r$ u. $l$	2.4647	2.4656	6.6353	6.6358	1.4921	1.4914

Die Mittelwerthe aus den Einzelwerthen beim rechtsseitigen und beim linksseitigen Umfahren zeigen für die beiden Papierarten keine besonders auffälligen Differenzen, während die für Lindenholz als Unterlage wieder grösser sind. Die Versuchsreihen 20 und 21 wurden mit einer andern Sorte Maschinenpapier (Rollenpapier mit ziemlich rauher Oberfläche) als Unter-

Tabelle C. \*) Pol ausserhalb. Unterlage Velinpapier.

Nummer	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Figur	Dreieck	Dreieck	Dreieck	Rechteck	Vieleck	krummlinig begrenzte Figur	krummlinig begrenzte Figur	gemischtlinig begrenzte Figur	Vieleck
Richtung $r$	0.3464	0.8009	1.6100	0.6940	5.6260	1.3975	5.1520	11.2612	17.0250
" $l$	0.3477	0.8022	1.6105	0.6967	5.6280	1.3988	5.1560	11.2628	17.0289
" $r$	0.3474	0.8001	1.6065	0.6977	5.6262	1.3995	5.1602	11.2615	17.0286
" $l$	0.3464	0.8009	1.6095	0.6961	5.6283	1.3972	5.1593	11.2605	17.0267
" $r$	0.3454	0.8004	1.6080	0.6969	5.6282	1.3970	5.1565	11.2610	17.0240
" $l$	0.3474	0.8018	1.6120	0.6980	5.6290	1.3980	5.1565	11.2610	17.0297
" $r$	0.3468	0.8004	1.6094	0.6985	5.6290	1.3970	5.1565	11.2626	17.0297
" $l$	0.3468	0.8008	1.6094	0.6985	5.6290	1.3970	5.1565	11.2626	17.0297
Mittel aus $r$	0.3446	0.8004	1.6094	0.6959	5.6248	1.3968	5.1570	11.2596	17.0320
" $l$	0.3491	0.8013	1.6124	0.6983	5.6311	1.3995	5.1595	11.2626	17.0261
" $r$ u. $l$	0.3469	0.8009	1.6109	0.6971	5.6279	1.3981	5.1583	11.2611	17.0305
W. Fehler d. Mittels	$\pm 0.00024$	$\pm 0.00019$	$\pm 0.00053$	$\pm 0.00023$	$\pm 0.00032$	$\pm 0.00041$	$\pm 0.00063$	$\pm 0.00035$	$\pm 0.00018$
aus dem wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung	$\pm 0.00024$	$\pm 0.00019$	$\pm 0.00053$	$\pm 0.00023$	$\pm 0.00032$	$\pm 0.00041$	$\pm 0.00063$	$\pm 0.00035$	$\pm 0.00018$
zum Mittel	578	1600	1240	1395	8040	1750	3970	14080	9460

\*) Den Fahrstift bei sämtlichen Figuren mit freier Hand der Contour derselben nachgeführt.

Tabelle B.\*)

Nummer	7	V. P.	8	M. P.	9	Lh.	10	V. P.	11	M. P.	12	Lh.	13	V. P.	
Figur	Probeplatte $K_1$						Probeplatte $K_2$						Probeplatte $K_2$		
Pol	E n t f e r n t												Pol nahe		
Richtung	$r$	2'4645	$\frac{1}{2}(l+r)$	2'4645	$\frac{1}{2}(l+r)$	2'4680	$\frac{1}{2}(l+r)$	6'6330	$\frac{1}{2}(l+r)$	6'6365	$\frac{1}{2}(l+r)$	6'6480	$\frac{1}{2}(l+r)$	6'6350	$\frac{1}{2}(l+r)$
"	$l$	70	2'4658	90	2'4668	750	2'4715	62	6'6346	430	6'6398	555	6'6517	65	6'6358
"	$r$	25		55		680		40		375		475		45	
"	$l$	90	2'4657	90	2'4672	735	2'4708	60	6'6350	420	6'6397	570	6'6528	70	6'6357
"	$r$	30		48		685		35		365		485		45	
"	$l$	80	2'4658	83	2'4666	755	2'4720	60	6'6348	425	6'6395	573	6'6529	60	6'6353
"	$r$	85		32		690		40		365		490		50	
"	$l$	85	2'4660	82	2'4657	730	2'4710	63	6'6352	415	6'6390	555	6'6522	80	6'6365
"	$r$	40		35		685		53		355		480		56	
"	$l$	80	2'4660	60	2'4647	720	2'4702	70	6'6361	400	6'6378	560	6'6520	68	6'6362
"	$r$	50		28		690		34		350		490		60	
"	$l$	2'4690	2'4670	2'4663	2'4646	2'4725	2'4708	6'6360	6'6347	6'6405	6'6377	6'6580	6'6535	6'6372	6'6366
Mittel aus	$r$	2'4638	$\pm 0.0006$	2'4641	$\pm 0.0007$	2'4685	$\pm 0.0003$	6'6339	$\pm 0.0005$	6'6363	$\pm 0.0006$	6'6483	$\pm 0.0004$	6'6351	$\pm 0.0004$
"	$l$	2'4683	$\pm 0.0005$	2'4678	$\pm 0.0009$	2'4736	$\pm 0.0009$	6'6363	$\pm 0.0003$	6'6416	$\pm 0.0009$	6'6566	$\pm 0.0007$	6'6369	$\pm 0.0005$
"	a. $\frac{1}{2}(l+r)$	2'4660	$\pm 0.0004$	2'4659	$\pm 0.0007$	2'4711	$\pm 0.0004$	6'6351	$\pm 0.0004$	6'6389	$\pm 0.0006$	6'6525	$\pm 0.0005$	6'6360	$\pm 0.0003$
			$\square$ Cm.		$\square$ Cm.		$\square$ Cm.		$\square$ Cm.		$\square$ Cm.		$\square$ Cm.		$\square$ Cm.
Differenz	$l-r$	$\pm 0.0045$	0.090	$\pm 0.0037$	0.074	$\pm 0.0051$	0.102	$\pm 0.0024$	0.048	$\pm 0.0053$	0.106	$\pm 0.0083$	0.166	$\pm 0.0018$	0.036

Nummer	14	M. P.	15	L.h.	16	V. P.	17	M. P.	18	V. P.	19	M. P.	20	M. P. <sub>1</sub>	
Figur	Probeplatte $K_2$				Control-Lineal $L_1^5$				Control-Lineal $L_2^9$				$L_1^5$		
Pol	Pol nahe				E n t f e r n u n g										
Richtung	$r$	6·6360	$\frac{1}{2}(l+r)$	6·6375	$\frac{1}{2}(l+r)$	3·9262	$\frac{1}{2}(l+r)$	3·9260	$\frac{1}{2}(l+r)$	12·7345	$\frac{1}{2}(l+r)$	12·7300	$\frac{1}{2}(l+r)$	3·9266	$\frac{1}{2}(l+r)$
"	$l$	385	6·6373	412	6·6393	88	3·9275	87	3·9274	66	12·7356	74	12·7337	295	3·9281
"	$r$	362		376		60		47		41		20		280	
"	$l$	400	6·6381	406	6·6391	90	3·9275	86	3·9266	65	12·7353	60	12·7340	314	3·9297
"	$r$	363		372		72		40		34		36		260	
"	$l$	385	6·6374	402	6·6387	92	3·9282	86	3·9263	62	12·7348	52	12·7314	295	3·9277
"	$r$	355		370		70		44		40		25		260	
"	$l$	380	6·6367	404	6·6387	96	3·9283	73	3·9257	47	12·7344	56	12·7340	296	3·9278
"	$r$	360		374		69		40		31		18		278	
"	$l$	375	6·6373	406	6·6390	95	3·9282	64	3·9252	66	12·7348	49	12·7334	314	3·9296
"	$r$	370		376		64		48		30		05		268	
"	$l$	6·6365	6·6367	6·6408	6·6392	3·9282	3·9274	3·9268	3·9258	12·7355	12·7343	12·7332	12·7319	3·9306	3·928
Mittel aus	$r$	6·6362	$\pm 0.0008$	6·6374	$\pm 0.0002$	3·9266	$\pm 0.0008$	3·9247	$\pm 0.0005$	12·7337	$\pm 0.0004$	12·7317	$\pm 0.0009$	3·9269	$\pm 0.0006$
"	$l$	6·6382	$\pm 0.0008$	6·6406	$\pm 0.0002$	3·9291	$\pm 0.0002$	3·9277	$\pm 0.0007$	12·7360	$\pm 0.0005$	12·7354	$\pm 0.0009$	3·9303	$\pm 0.0006$
" a. $\frac{1}{2}(l+r)$		6·6372	$\pm 0.0004$	6·6390	$\pm 0.0002$	3·9279	$\pm 0.0003$	3·9262	$\pm 0.0005$	12·7349	$\pm 0.0003$	12·7336	$\pm 0.0005$	3·9286	$\pm 0.0006$
Differenz $l-r$		$\pm 0.0020$	0.040	$\pm 0.0032$	0.064	$\pm 0.0015$	0.060	$\pm 0.0030$	0.060	$\pm 0.0023$	0.046	$\pm 0.0037$	0.074	$\pm 0.0034$	0.063

Nummer	21	M. P.	22	V. P.	23	V. P.	24	M. P.	25	M. P.	26	M. P.	27	M. P.
Figur	$L_3^8$		$L_1^5$		$L_2^9$		$L_1^5$		$L_2^9$		$L_1^5$		$L_2^9$	
Pol	E n t f e r n t													
Richtung	r	10 0588 $\frac{1}{2}(l+r)$	2 6175 $\frac{1}{2}(l+r)$	8 4818 $\frac{1}{2}(l+r)$	2 6151 $\frac{1}{2}(l+r)$	8 4834 $\frac{1}{2}(l+r)$	2 6162 $\frac{1}{2}(l+r)$	8 4814 $\frac{1}{2}(l+r)$						
"	l	648 10 0616	217 2 6196	908 8 4868	200 2 6176	914 8 4874	220 2 6191	908 8 4861						
"	r	568	176	828	159	832	168	807						
"	l	627 10 0598	219 2 6197	913 8 4870	199 2 6179	912 8 4872	222 2 6195	881 8 4844						
"	r	563	175	839	177	850	162	852						
"	l	643 10 0603	216 2 6196	919 8 4879	204 2 6191	915 8 4882	205 2 6183	892 8 4872						
"	r	580	176	835	152	817	170	880						
"	l	625 10 0602	212 2 6194	915 8 4875	202 2 6177	900 8 4858	223 2 6196	884 8 4882						
"	r	564	170	829	170	818	162	780						
"	l	624 10 0594	216 2 6193	914 8 4872	2 6206	2 6188	8 4892	8 4855	2 6219	2 6190	8 4790	8 4785		
"	r	564	178	816										
"	l	10 0632	10 0598	2 6215	2 6197	8 4914	8 4865							
Mittel aus	r	10 0571 $\pm 0.0007$	2 6175 $\pm 0.0002$	8 4828 $\pm 0.0006$	2 6162 $\pm 0.0003$	8 4830 $\pm 0.0009$	2 6165 $\pm 0.0002$	8 4827 $\pm 0.0026$						
"	l	10 0633 $\pm 0.0007$	2 6216 $\pm 0.0002$	8 4914 $\pm 0.0002$	2 6202 $\pm 0.0002$	8 4907 $\pm 0.0007$	2 6218 $\pm 0.0005$	8 4871 $\pm 0.0031$						
"	a. $\frac{1}{2}(l+r)$	10 0602 $\pm 0.0005$	2 6195 $\pm 0.0001$	8 4871 $\pm 0.0003$	2 6182 $\pm 0.0005$	8 4868 $\pm 0.0009$	2 6191 $\pm 0.0003$	8 4849 $\pm 0.0026$						
Differenz	l-r	$\pm 0.0062$	$\pm 0.0041$	$\pm 0.0086$	$\pm 0.0040$	$\pm 0.0077$	$\pm 0.0053$	$\pm 0.0159$						
		$\square$ Cm. 0 124	$\square$ Cm. 0 123	$\square$ Cm. 0 258	$\square$ Cm. 0 120	$\square$ Cm. 0 231	$\square$ Cm. 0 231	$\square$ Cm. 0 129						

\*) Anmerkung. Die angegebenen Zahlen bedeuten Rollenumdrehungen; um die Fläche zu erhalten, hätte man die Zahlen der Tabelle A, C und jene der Reihen 7–21 von B mit 20  $\square$  Cm., die Zahlen der Reihen 22–27 mit 30  $\square$  Cm. zu multiplizieren.

lage für die Laufrolle durchgeführt; es zeigt sich auch hier kein Unterschied, was am besten daraus erhellt, dass, wenn man die Flächen aus der Anzahl der erhaltenen Rollenumdrehungen mit dem für Velinpapier als Unterlage geltenden Werth für eine Rollenumdrehung, nämlich mit  $19.985 \square^{\text{cm}}$  ableitet, die Zahlen 78.513 und 201.053  $\square^{\text{cm}}$  erhält, während die wirklichen Flächen 78.540 und 201.062  $\square^{\text{cm}}$  sind.

Die Versuchsreihen 22—27 sind mit der Fahrarmlänge, für welche der Werth einer Rollenumdrehung  $30 \square^{\text{cm}}$  gilt, erhalten worden und um zu sehen, ob die symmetrische Stellung der Rolle auf der Scheibe unumgänglich nothwendig ist, wurde bei 26 und 27 die Polstellung so gewählt, dass die Messrolle ihre Umdrehungen in der einen Hälfte der Scheibe vollziehen musste. Man erkennt, dass bei sorgfältig durchgeführten Beobachtungen die Symmetrie in der Messrolle auf der Scheibe nicht streng zu berücksichtigen ist.

Da man in dem Präcisions-Polarplanimeter ein äusserst leistungsfähiges und empfindliches Instrument besitzt, so wird es sich immer empfehlen, in einem gegebenen Falle für jene Papierart, auf welcher die Figur gezeichnet ist, die einer Rollenumdrehung entsprechende Fläche bei der markirten Fahrarmlänge durch Umfahren auf Probeplatten oder mittelst Control-Lineal genau bestimmter Figuren im Mittel aus einer gleich grossen Anzahl Beobachtungen beim rechtsseitigen wie bei dem linksseitigen Umfahren zu bestimmen und denselben für die Rechnung zu benutzen.

**Genauigkeit der Resultate, welche sich mit Hilfe dieses Planimeters durch das Umfahren beliebig begrenzter Figuren ergeben.**

Die bisherigen Untersuchungen wurden an solchen Figuren vorgenommen, welche den Fehler des nicht genauen Nachfahrens der Contur der Figur ausschliessen. Die in Tabelle B angegebenen Fehlerwerthe entsprechen dem Fehler „Einer Beobachtung“.

Um nun auch zur Erkenntniss des Grades der Genauigkeit zu kommen, welcher statt hat, wenn man Flächen beliebig begrenzter Figur durch das Umfahren mit Hilfe dieses Planimeters bestimmt, so habe ich Dreiecke, Vierecke, krummlinig begrenzte Figuren und eine gemischtlinig begrenzte Figur nur durch das Nachfahren mit freier Hand in ihrer Grösse bestimmt; die Ergebnisse sind in Tabelle C Nr. 28—36 mitgetheilt.

Es ergibt sich hieraus, dass der wahrscheinliche Fehler eines Resultates aus dem Mittel einer Beobachtung beim rechtsseitigen und einer Beobachtung beim linksseitigen Umfahren noch innerhalb jener Grenzen liegt, welche durch das Ablesen an der Rolle bedingt ist; das Mittel aus den 9 wahrscheinlichen Fehlerwerthen für „Eine Beobachtung“ ist

0.00092. Bezeichnet man mit  $A$  die Anzahl der Rollenumdrehungen, welche sich bei dem Umfahren einer beliebig begrenzten Figur ergeben, so wird man nach diesen Untersuchungen zu sagen berechtigt sein, dass die entsprechende Fläche im Allgemeinen um nicht viel mehr als  $\frac{1}{1000 A}$  ihres

Werthes oder um  $\frac{0.1}{A}$  Percent unsicher sein wird.

Für die umfahrenen Figuren wurde der Reihe nach gefunden:

$A = 0.347, 0.801, 1.609, 0.697, 5.628, 1.398, 5.518, 11.261, 17.028,$

somit ist beziehentlich:

$$\frac{1}{1000 A} = \frac{1}{347}, \frac{1}{801}, \frac{1}{1609}, \frac{1}{697}, \frac{1}{5628}, \frac{1}{1398}, \frac{1}{5518}, \frac{1}{11261}, \frac{1}{17028},$$

während die zugehörigen wirklich gefundenen Fehlerverhältnisse sind:

$$\frac{1}{578}, \frac{1}{1600}, \frac{1}{1240}, \frac{1}{1395}, \frac{1}{8040}, \frac{1}{1750}, \frac{1}{3970}, \frac{1}{14080}, \frac{1}{9460},$$

es sind dies Zahlen, welche die obige Angabe über die Genauigkeit des durch das Planimeter erreichten Resultates gut rechtfertigen, selbstverständlich innerhalb jener weiten Grenzen, wie sie bei derartigen Untersuchungen zugestanden werden müssen. Es zeigen auch diese Untersuchungen wieder deutlich, dass es nicht angeht, bei der Beurtheilung der Leistungsfähigkeit des Planimeters einfach allgemein zu sagen, dass dasselbe

die Flächen bis auf  $\frac{1}{n}$  genau angeben wird, sondern dass sich dieses Fehlerverhältniss auch nach der Grösse der Fläche richten wird.

Der wahrscheinliche Fehler „Einer Beobachtung“ hat sich beim Umfahren der Figuren mit freier Hand ergeben zu  $\pm 0.0009$ , jener beim Umfahren der auf Probescheiben oder durch Controllineale in ihrer Contour ganz bestimmten Figuren zu  $\pm 0.0006$  einer Rollenumdrehung; es liegen also beide Fehler innerhalb der durch die Ablesungsgrenze bestimmten Werthe.

Nach den einheitlich von mir durchgeführten vergleichenden Beobachtungen mit dem Linearplanimeter, dem Polarplanimeter gewöhnlicher Construction und dem Präcisions-Polarplanimeter kann mit Recht behauptet werden, dass das Präcisions-Polarplanimeter, wenn es immer so sorgfältig ausgeführt ist, wie das zur Untersuchung verwendete, in seiner Leistungsfähigkeit das Polarplanimeter gewöhnlicher Construction bedeutend überholt hat, und dass es dem Linearplanimeter in seiner jetzigen Construction mindestens gleich zu stellen ist.

Wien, im August 1882.

# Zur Berechnung eines besonderen Constructionssystems bogenförmiger Dachbinder.

Von Prof. J. E. Brik.

In Fällen, wo bogenförmige Dachbinder angeordnet werden sollen, wobei jedoch die den Horizontalschub aufnehmende, die Kämpfer verbindende horizontale Schliesse nicht angebracht werden darf, wendet man oft den bekannten „Sichelträger“ als Constructionssystem an. Diese an sich sehr zweckmässige Construction entspricht jedoch nicht immer den Ansprüchen des Architekten, dem die Beibehaltung der Form concentrischer Bogen für die Dachbinder wünschenswerth sein kann. Dieser Absicht kann entsprochen werden, wenn statt der horizontalen Schliesse eine nach oben erhobene polygonale „Spannkette“ angeordnet wird, welche mittelst eigener Hängestangen am steifen Bogen angehängt ist.

Es entsteht hiedurch eine Combination des steifen Bogens mit einer Kette zu dem Trägersystem Fig. 1.

Derartige Trägersysteme werden wohl unter allen Umständen einen grösseren Materialaufwand fordern, als dies bei Bogen mit horizontaler Schliesse der Fall ist; dennoch können architektonische Rücksichten und andere Umstände für die Anwendung eines solchen Trägersystems maassgebend sein.

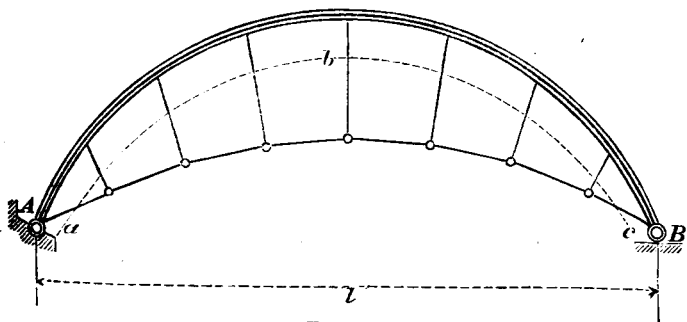


Fig. 1.

Wir wollen im Folgenden die statische Berechnung eines derartigen Systems mittheilen.

## 1. Allgemeines.

Unter den verticalen Belastungen des Bogens entstehen in dessen Kämpfern Drücke, deren horizontale Componenten die Spannkette und mithin auch die Hängestangen in Spannung versetzen. Letztere übertragen ihre Spannung wieder auf den steifen Bogen, so dass dieser nebst den äusseren Belastungen noch die Spannungen der Hängestangen aufzunehmen hat. Maassgebend für die Spannung der Kette ist demnach der vom Bogen ausgeübte horizontale Kämpferdruck.

Obwohl unter den Belastungen des Bogens Deformationen desselben eintreten und von diesen auch die Form der Spannkette beeinflusst wird, so sind diese räumlichen Verschiebungen der Polygonsecken der Kette doch so gering, dass hiedurch die Spannungen der Kettenglieder selbst nicht wesentlich alterirt werden. Wir werden hiernach die Berechnung der Kettenspannungen auf die ursprüngliche Form

der Kette beziehen und den geringfügigen Einfluss der Deformation derselben auf deren Spannung ausser Acht lassen.

Für die Form der Spannkette wird ein Polygon, dessen Ecken in einem Kreisbogen liegen, angenommen; die Kettenglieder sollen gleiche Längen und die in den Polygonsecken angreifenden Hängestangen eine zum Kreisbogen des Kettenpolygons radiale Lage erhalten.

Uebrigens wird, wie wohl selbstverständlich, die ganze Anordnung symmetrisch zur Trägermitte vorausgesetzt.

Hinsichtlich des steifen Bogens nehmen wir an, dass derselbe mit Kämpfergelenken versehen sei, und dass alle jene Bedingungen eingehalten werden, welche die Anwendung der bei Brückenbogenträgern üblichen Formeln ermöglichen.

Die äusseren Lasten — in diesem Falle das Eigengewicht des Bogens, der Pfetten, des Deckmaterials, Schneec- und Winddruck — kommen am steifen Bogen zur Wirkung, wogegen die Spannkette ausser den von den Kämpferdrücken herrührenden und den Hängestangenspannungen nur durch das in den Polygonsecken wirksam gedachten Eigengewicht belastet erscheint.

Wir beziehen den Träger auf ein rechtwinkliges Achsensystem, dessen Ursprung mit dem linken Auflagerpunkte zusammenfällt und legen die horizontale Abscissenachse demnach durch beide Auflagerpunkte.

Die Coordinaten eines Punktes der Bogenachse seien  $x, y$ , im weiteren bezeichne:

$\alpha$  den Winkel der Tangente an die Bogenachse mit der Horizontalen in  $x, y$ ,

$\alpha_0$  diesen Winkel für den linken Kämpfer,

$l$  die Stützweite,

$f$  die Pfeilhöhe der Bogenachse,

$f'$  " " " Kette,

$\lambda$  die Länge eines Kettengliedes,

$r_1$  den Radius des dem Kettenpolygon umschriebenen Kreises,

$\delta$  den, der Länge  $\lambda$  entsprechenden Centriwinkel,

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$  die Längen der Hängestangen,

$F_1, F_2, F_3 \dots$  die Querschnitte der Kettenglieder,

$F'_1, F'_2, F'_3 \dots$  die Querschnitte der Hängestangen,

$E, E_1, E_2$  die Elasticitätsmoduli für das Material des steifen Bogens, der Kette und der Hängestangen,

$S_1, S_2, S_3 \dots$  seien die Spannungen der aufeinander folgenden Kettenglieder und

$U_1, U_2, U_3 \dots$  die Spannungen der Hängestangen.

Das eine Auflager wollen wir als fix, das zweite dagegen als beweglich voraussetzen.

In Folge des elastischen Verhaltens der Construction, also der Dehnbarkeit der Kette, der Hängestangen und der

Biegsamkeit des Bogens wird unter dem Einflusse der Belastungen das bewegliche Auflager horizontal ausweichen. Ist

$H$  der horizontale Zug, der in den Kämpfern vom Bogen gegen die Spannkette ausgeübt wird,

$\Delta l$  die Grösse des horizontalen Ausweichens des rechten (beweglichen) Auflagers,

$\Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2, \Delta \lambda_3, \dots$ , die unter den Spannungen  $S_1, S_2, S_3$  eintretenden elastischen Längenänderungen der Kettenglieder  $\lambda$ , und

$\Delta \gamma_1, \Delta \gamma_2, \Delta \gamma_3, \dots$  die Längenänderungen der Hängestangen in Folge der Spannungen  $U_1, U_2, U_3, \dots$  so ist nach dem Principe der virtuellen Momente:

$$H \cdot \Delta l = \sum S \cdot \Delta \lambda + \sum U \cdot \Delta \gamma \dots \dots \dots 1)$$

Nach dem Elasticitätsgesetze ist

$$\left. \begin{aligned} \Delta \lambda_1 &= \frac{S_1 \lambda}{F_1 E_1} & \Delta \gamma_1 &= \frac{U_1 \gamma_1}{F_1' E_2} \\ \Delta \lambda_2 &= \frac{S_2 \lambda}{F_2 E_1} & \Delta \gamma_2 &= \frac{U_2 \gamma_2}{F_2' E_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Mithin

$$H \Delta l = \frac{\lambda}{E_1} \sum \frac{S^2}{F} + \frac{1}{E_2} \sum \frac{U^2 \gamma_i}{F'};$$

Von Seite des Bogens ist, bei Vernachlässigung des Einflusses der Axialkraft,

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_{x=0}^{x=1} \frac{M_x y ds}{J} \dots \dots \dots 3*)$$

womit entsteht

$$\frac{H}{E} \int_{x=0}^{x=1} \frac{M_x y ds}{J} = \frac{\lambda}{E_1} \sum \frac{S^2}{F} + \frac{1}{E_2} \sum \frac{U^2 \gamma_i}{F'} \dots \dots \dots 4)$$

Hiebei bedeutet:

$M_x$  das Moment bezüglich des Punktes  $xy$ ,

$J$  das Trägheitsmoment des Querschnittes des Bogens,

$ds$  das Element der Bogenachse.

## II. Berechnung der Spannungen der Kettenglieder und der Hängestangen.

Denkt man durch einen Schnitt  $abc$  Fig. 1 den Bogen von der Kette getrennt, so werden die an den Schnittstellen anzubringenden Kräfte den unter einer Belastung auftretenden inneren Spannungen jener Theile entsprechen.

An der abgetrennten Kette wirken alsdann die in nebenstehender Fig. 2 bezeichneten Kräfte.

Für irgend einen Knotenpunkt  $z$  Fig. 2\* gibt die Bedingung des Gleichgewichtes die nach einigen Reductionen leicht ermittelbaren Beziehungen:

$$S_{z+1} = S_z + Q \frac{\sin(n-z)\delta}{\cos \delta/2} \dots \dots \dots 5)$$

$$U_z = 2 S_z \sin \delta/2 + Q \frac{\cos[2(n-z)-1]\delta/2}{\cos \delta/2} \dots \dots \dots 6)$$

wobei

$n\delta$  der halbe Centriwinkel des dem Kettenpolygon umschriebenen Kreisbogens und

\*) Vergleiche Jahrgang 1880 dieser Zeitschrift Seite 109, die erste der Gleichungen 5) für  $x = l, y = 0, \Delta x = \Delta l$ .

$Q$  das für alle Knotenpunkte gleich gross angenommene Knotengewicht der Eigenlast bedeutet.

Bildet man zwischen  $U_{z+1}$  und  $U_z$  die Differenz, so erhält man nach einigen Reductionen:

$U_{z+1} - U_z = \Delta U_z = 2 \cdot Q \cdot \operatorname{tg} \delta/2 \cdot [\sin(n-z)\delta + \sin(n-z-1)\delta]$  7) womit die Spannung jeder Hängestangen aus jener der vorangehenden berechnet werden kann.

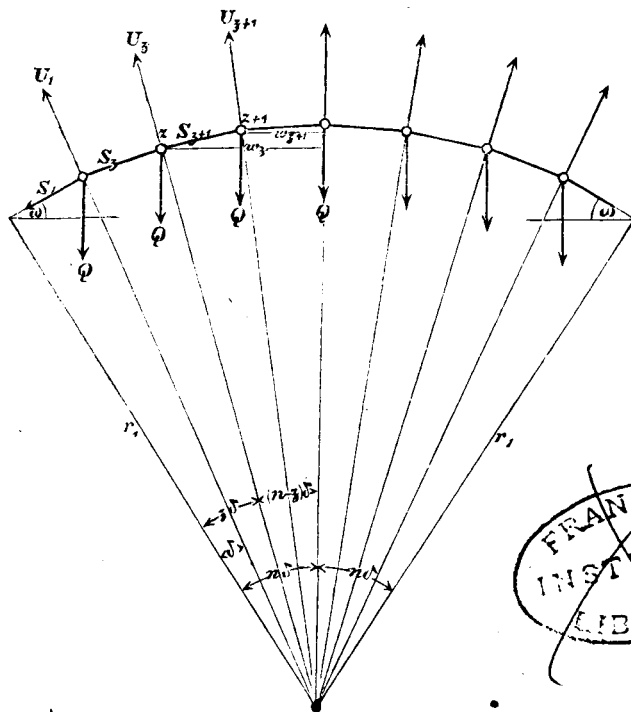


Fig. 2.

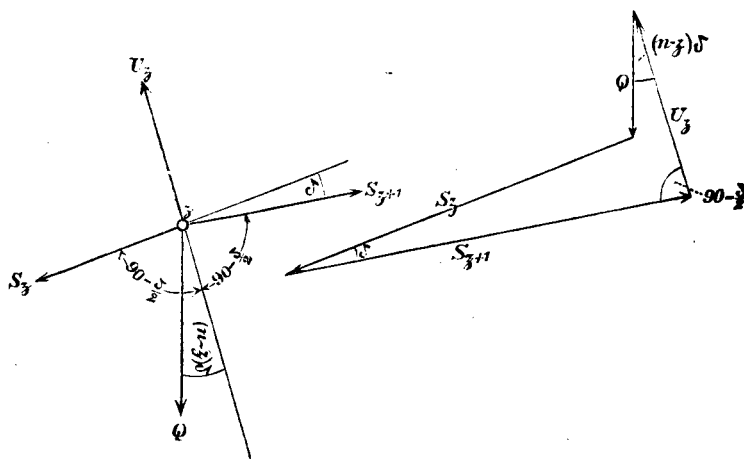


Fig. 2a).

Setzen wir zur Vereinfachung der Rechnung

$$\left. \begin{aligned} \sin(n-z)\delta &= \frac{w_z}{r_1} \\ \sin(n-z-1)\delta &= \frac{w_{z+1}}{r_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 8)$$

so ergibt sich

$$\Delta U_z = 2 \frac{Q}{r_1} (w_z + w_{z+1}) \cdot \operatorname{tg} \delta/2 \dots \dots \dots 9)$$

Hier sind  $w_z$  und  $w_{z+1}$  die horizontalen Abstände der Polygonsecken  $z$  und  $z+1$  von der Mitte und es können diese Werthe aus der Zeichnung leicht abgegriffen werden.

Die Spannungen der Hängestangen sind dann unter Hinweis auf Gleichung 6 und 9:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 2 S_1 \sin \delta/2 + Q \frac{\cos(2n-3)\delta/2}{\cos \delta/2} \\ U_2 &= U_1 + 2 \frac{Q}{r_1} (w_1 + w_2) \operatorname{tg} \delta/2 \\ U_3 &= U_2 + 2 \frac{Q}{r_1} (w_2 + w_3) \operatorname{tg} \delta/2 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots 10)$$

Wird mit  $\omega$  der Winkel des ersten Kettengliedes mit der Horizontalen bezeichnet, so ist

$$S_1 = \frac{H}{\cos \omega} \dots \dots \dots 11)$$

und 
$$U_1 = \frac{2 H \sin \delta/2}{\cos \omega} + Q \frac{\cos(2n-3)\delta/2}{\cos \delta/2} \dots \dots 12)$$

In den meisten Fällen wird der Einfluss der Knotenlasten auf die Spannungen der Hängestangen und der Kette vernachlässigt werden dürfen, alsdann aber folgt aus 5 und 11

$$S_z = S_{z+1} = S_1 = \frac{H}{\cos \omega} \dots \dots \dots 13)$$

$$U_z = 2 S_z \sin \delta/2 = \frac{2 H \sin \delta/2}{\cos \omega} \dots \dots 14)$$

d. h. die Spannung der Kettenglieder und jene der Hängestangen ist durchaus constant.

### III. Berechnung des Horizontalzuges $H$ .

Die Belastung des Bogenträgers (Fig. 3) bestehe aus den äusseren Kräften

$P_1, P_2, P_3, \dots$ , welche in den Abständen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  von der Ordinatenachse angreifen und aus den Spannungen der Hängestangen  $U_1, U_2, U_3, \dots$ , die in den Abständen  $u_1, u_2, u_3, \dots$  wirken.

Am linken Kämpfer wirkt die verticale Reaction  $A$  und der Horizontaldruck  $H$ .

Die Zerlegung der Spannungen  $U$  in verticale und horizontale Componenten gibt für erstere:

$U_1 \cos(n-1)\delta, U_2 \cos(n-2)\delta, \dots U_z \cos(n-z)\delta, \dots$

und für letztere:

$U_1 \sin(n-1)\delta, U_2 \sin(n-2)\delta, \dots U_z \sin(n-z)\delta, \dots$

$$H = \frac{\int_{x=0}^{x=1} \mathfrak{M}_x y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds - 2 \frac{\sin \delta/2}{\cos \omega} \left\{ \int_{x=0}^{x=1} m_x y ds - \int_{x=0}^{x=1} m_y y ds \right\} + \frac{J}{\cos^2 \omega} \left\{ \frac{2 \lambda n}{F} + \frac{4 \cdot (\Sigma \eta) \sin^2 \delta/2}{F} \right\}} \dots \dots \dots 18)$$

Für einen Punkt  $xy$  der Bogenachse ist:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{x}{l} \sum_0^1 P(l-a) - \sum_0^x P(x-a) + \frac{x}{l} \sum_0^1 U(l-u) \cos(n-z)\delta - \sum_0^x U(x-u) \cos(n-z)\delta - Hy - \sum_0^x U(y-v) \sin(n-z)\delta \dots 15)$$

wobei

$v_1, v_2, v_3, \dots$  die Ordinaten der Angriffspunkte der  $U$  am Bogen sind. Indem wir Gleichung 14 für  $U$  anwenden, setzen wir ausserdem

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{l} \sum_0^1 P(l-a) - \sum_0^x P(x-a) &= \mathfrak{M}_x \\ \frac{x}{l} \sum_0^1 (l-u) \cos(n-z)\delta - \sum_0^x (x-u) \cos(n-z)\delta &= m_x \\ \sum_0^x (y-v) \sin(n-z)\delta &= m_y \end{aligned} \right\} \dots 16)$$

und es bedeutet dann

$\mathfrak{M}_x$  das Moment der äusseren verticalen Kräfte für den Querschnitt  $x$ ,

$m_x$  das Moment in Folge der Vertical-Componenten von Lasten  $= 1$ , die an Stelle der Hängestangen wirken, und

$m_y$  das Moment in Folge der horizontalen Componenten von Lastenheiten, die an Stelle der Hängestangen wirken.

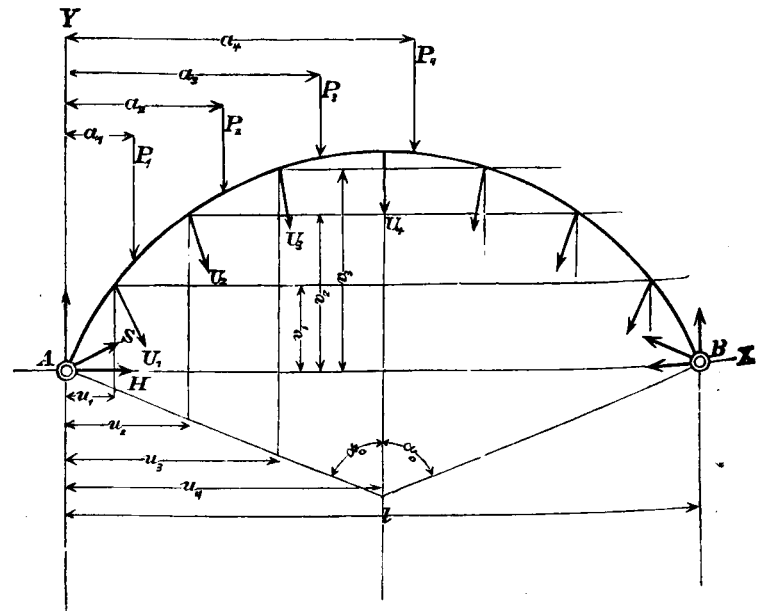


Fig. 3.

Diese Momente sind auf den Punkt  $xy$  zu beziehen. Man erhält:

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_x + 2 H \frac{\sin \delta/2}{\cos \omega} \cdot m_x - 2 H \frac{\sin \delta/2}{\cos \omega} m_y - Hy \dots 17)$$

Unter Voraussetzung gleichen Materials für Bogen, Kette und Hängestangen, constanten Querschnitts des Bogens, und Einführung der Werthe aus 13, 14 und 17 in Gleichung 4 ergibt die Reduction auf  $H$ :

$$H_0 = \frac{\int_{x=0}^{x=1} \mathfrak{M}_x y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds} \dots \dots \dots 19^*)$$

\*) Vergleiche Jahrgang 1880 dieser Zeitschrift, S. 110, Gl. 12.



Für die in den Abständen  $u_1, u_2, u_3, \dots$  angreifenden verticalen Lasten:

1.  $\cos(n-1)\delta$ , 1.  $\cos(n-2)\delta, \dots$  1.  $\cos(n-z)\delta, \dots$   
ist analog der Gleichung 19

$$H_0' = \frac{\int_{x=0}^{x=1} m_x y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds} \dots \dots \dots 20)$$

Wirken an einem Bogenträger mit Kämpfergelenken und unnachgiebigen Stützen in den Punkten  $u_1 v_1, u_2 v_2, u_3 v_3, \dots$ , die symmetrisch zur Bogenmitte angeordneten horizontalen Kräfte

1.  $\sin(n-1)\delta$ , 1.  $\sin(n-2)\delta, \dots$  1.  $\sin(n-z)\delta, \dots$   
von welchen jede der ihr symmetrisch gegenüber liegenden gleich und entgegengesetzt ist, so gibt die Bedingung für die Unnachgiebigkeit der Stützen die Beziehung

$$0 = \int_{x=0}^{x=1} M_x y ds,$$

wobei jetzt:

$$M_x = H_0'' y - \sum_{v=1}^x (y-v) \sin(n-z)\delta$$

zu setzen ist.

Hieraus folgt:

$$H_0'' = \frac{\int_{x=0}^{x=1} \sum_{v=0}^x (y-v) \sin(n-z)\delta \cdot y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds} = \frac{\int_{x=0}^{x=1} m_y \cdot y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds} \dots \dots \dots 21)$$

Wird in Gleichung 18 Zähler und Nenner durch

$$\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds$$

dividirt und werden die Werthe der Gleichung 19, 20 und 21 dortselbst eingeführt, so erhält man:

$$H = \frac{H_0}{1 - \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} (H_0' - H_0'') + \frac{2J}{\cos^2 \omega \int_{x=0}^{x=1} y^2 ds} \left( \frac{\lambda n}{F} + \frac{2 \sin^2 \delta/2}{F'} \Sigma \tau_i \right)} \dots \dots \dots 22)$$

Durch vorstehende Gleichung ist der Horizontalzug  $H$  bestimmt, womit die Spannung der Kettenglieder und der Hängestangen, sowie auch die Beanspruchung des steifen Bogens berechnet werden kann.

Da das dritte Glied des Nenners die Grössen  $J, F$  und  $F'$  enthält, dasselbe seinem Werthe nach jedoch immer sehr klein ist, so wird für die Rechnung zum Zwecke der Dimensions-Bestimmung dieses Glied unterdrückt werden können, und wir benützen zu diesem Zwecke die vereinfachte Beziehung:

$$H = \frac{H_0}{1 - 2 \frac{\sin \delta/2}{\cos \omega} (H_0' - H_0'')} \dots \dots \dots 23)$$

#### IV. Berechnung der Werthe $H_0, H_0'$ und $H_0''$ .

Wir benützen hiezu die sogenannten „Horizontaldruck-Curven“ (vergl. Jahrgang 1880 dieser Zeitschrift, S. 111.)

Denkt man nämlich für eine, längs des Bogens fortschreitende, verticale Einzellast von der Grösse = 1 Tonne über jedem Lastorte den Horizontaldruck als Ordinate aufgetragen, so entsteht eine Curve, die wir „Horizontaldruck-Curve“ genannt haben. Mittelst derselben kann in sehr einfacher Weise für jede verticale Belastung der Horizontaldruck der Kämpfer bestimmt werden.

Bezeichnet man die Ordinaten der Horizontaldruck-Curve für die Abscissen

$$a_1, a_2, a_3, \dots \text{ mit } \mathfrak{H}_{a_1}, \mathfrak{H}_{a_2}, \mathfrak{H}_{a_3}, \dots, \text{ so ist}$$

$$H_0 = P_1 \mathfrak{H}_{a_1} + P_2 \mathfrak{H}_{a_2} + \dots = \Sigma P \mathfrak{H} \dots \dots \dots 24)$$

Für die Abscissen

$u_1, u_2, u_3, \dots$  seien die Ordinaten  $\mathfrak{H}_{u_1}, \mathfrak{H}_{u_2}, \mathfrak{H}_{u_3}, \dots$ , so geben die verticalen Componenten der an Stelle der Hängestangen wirkenden Lasteneinheiten den Horizontaldruck:

$$H_0' = 1. \mathfrak{H}_{u_1} \cdot \cos(n-1)\delta + 1. \mathfrak{H}_{u_2} \cdot \cos(n-2)\delta + \dots$$

$$+ 1. \mathfrak{H}_{u_z} \cos(n-z)\delta, \dots = \Sigma \mathfrak{H} \cos(n-z)\delta \dots \dots \dots 25)$$

Für ein Paar horizontaler Kräfte, wovon jede = 1 Tonne und die symmetrisch und im entgegengesetzten Sinne am Bogen wirken, denken wir den hiedurch entstehenden horizontalen Widerstand der Stützen berechnet und dem Lastorte entsprechend als Abscisse aufgetragen. Dies für mehrere Lagen der Kräfte durchgeführt, gibt eine zweite Curve der Horizontaldrücke, mit deren Hilfe man für horizontale, symmetrisch gelegene, entgegengesetzt gerichtete und gleich grosse Kräfte den Horizontaldruck der Kämpfer in gleicher Weise, wie früher, bestimmen kann.

Sind die in den Ordinaten

$v_1, v_2, v_3, \dots$  wirkenden paarweisen Kräfte:

1.  $\sin(n-1)\delta$ , 1.  $\sin(n-2)\delta, \dots$  1.  $\sin(n-z)\delta, \dots$   
und sind die den  $v$  entsprechenden Abscissen der zweiten Horizontaldruck-Curve

$\mathfrak{H}'_{v_1}, \mathfrak{H}'_{v_2}, \mathfrak{H}'_{v_3}, \dots$ , so ist

$$H_0'' = \mathfrak{H}'_{v_1} \cdot \sin(n-1)\delta + \mathfrak{H}'_{v_2} \sin(n-2)\delta + \dots$$

$$+ \mathfrak{H}'_{v_z} \sin(n-z)\delta = \Sigma \mathfrak{H}' \sin(n-z)\delta \dots \dots \dots 26)$$

Hienach wird nach 23

$$H = \frac{H_0}{1 - \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} [\Sigma \mathfrak{H} \cos(n-z)\delta - \Sigma \mathfrak{H}' \sin(n-z)\delta]} \dots \dots \dots 27)$$

#### V. Berechnung der Horizontaldruck-Curven:

Die allgemeine Gleichung der Horizontaldruck-Curve für verticale Belastungen ist:

$$\mathfrak{H}_a = \frac{1}{2} \frac{\int_0^a x y ds + a \int_a^1 y ds}{\int_0^1 y^2 ds} \dots \dots \dots 28)$$

Für eine kreisförmige Bogenachse mit dem halben Centriwinkel  $\alpha_0$  ist:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha_0 + 2 \cos \alpha_0 (\cos \alpha_0 + \alpha_0 \sin \alpha_0 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha)}{3 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - \alpha_0 - 2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0} \dots 28^a)$$

Für flache Parabelbogen wird:

$$\bar{\Phi}_a = \frac{5}{8} \cdot \frac{a}{f} \left[ \left( \frac{a}{l} \right)^3 - 2 \left( \frac{a}{l} \right)^2 + 1 \right] \dots 28^b)$$

Setzt man hierin  $\frac{a}{l} = \frac{1}{2}$ , so ist

$$\bar{\Phi}_{\frac{1}{2}} = \frac{25}{128} \cdot \frac{l}{f} = \frac{3}{16} \cdot \frac{l}{f}$$

Substituiert man nun der Horizontaldruck-Curve eine Parabel, deren Scheitelordinate  $= \frac{3}{16} \cdot \frac{l}{f}$  ist, so lautet deren Gleichung:

$$\bar{\Phi}_a = \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{f} \cdot \left( \frac{a}{l} \right) \left( 1 - \frac{a}{l} \right) \dots 28^c)$$

Wir wollen an einem Beispiele die Resultate nach Gleichung 28<sup>a</sup> und 28<sup>c</sup> vergleichen und wählen zu diesem Zwecke einen Bogen von bedeutendem Pfeilverhältniss.

Es sei

$$l = 42.8^m,$$

$f = 14.0^m$  und die Bogenachse selbst kreisförmig.

Diesem Bogen entspricht der halbe Centriwinkel

$$\alpha_0 = 66^\circ 23' 23''.$$

In nachstehender Tabelle sind die Resultate nach Gleichung 28<sup>a</sup> und 28<sup>c</sup>, welch' letztere auf die Form

$$\bar{\Phi} = \frac{3}{8} \frac{\sin \alpha_0}{1 - \cos \alpha_0} \left( 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_0} \right)$$

gebracht wurde, enthalten.

$\alpha$	Nach Gl. 28 <sup>a</sup> $\bar{\Phi} =$	Nach Gl. 28 <sup>c</sup> $\bar{\Phi} =$	Differenz
0	0.546 ton	0.573 ton	-0.027 ton
10°	0.526 "	0.552 "	-0.026 "
20°	0.465 "	0.493 "	-0.028 "
30°	0.374 "	0.403 "	-0.029 "
40°	0.266 "	0.291 "	-0.025 "
50°	0.153 "	0.173 "	-0.020 "
60°	0.052 "	0.061 "	-0.009 "
$\alpha_0$	0	0	0

Man erkennt, dass selbst für das zum Beispiele gewählte grosse Pfeilverhältniss die Differenzen zwischen den Resultaten der genauen Gleichung 28<sup>a</sup> gegen jene der angenäherten 28<sup>c</sup>, absolut genommen, nur gering sind.

Vergleicht man die zwischen der Horizontaldruck-Curve und der Abscissenachse eingeschlossene Fläche für die nach Gleichung 28<sup>a</sup> erhaltene Curve mit jener nach Gleichung 28<sup>c</sup>, so erhält man im ersten Falle 15.33, im zweiten Falle 16.35, d. h. nach Gleichung 28<sup>c</sup> ergibt sich diese Fläche um 6.6% zu gross.

Bei kleinen Belastungen, sowie bei günstigeren Pfeilverhältnissen wird die, durch grosse Einfachheit ausgezeichnete Gleichung 28<sup>c</sup> praktisch brauchbare Resultate

\*) Diese Gleichung wurde auf anderem Wege als Näherungs-ausdruck für 28<sup>b</sup> zuerst von Prof. Fränkel entwickelt und begründet, „Civil-Ingenieur“ XXI. Bd., 8. Heft.

liefern; jedenfalls gibt dieselbe Näherungswerte, die in den meisten Fällen als ausreichend befunden werden dürften.

Für die zweite Horizontaldruck-Curve ist

$$\bar{\Phi}'_0 = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 y^2 ds - v \int_{\frac{1}{2}}^1 y ds}{\int_0^{\frac{1}{2}} y^2 ds} \dots 29)$$

Für eine kreisförmige Bogenachse mit dem halben Centriwinkel  $\alpha_0$  ist

$$H' = \frac{2 \cos \alpha_0 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{3 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - \alpha_0 - 2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0} \dots 29^a)$$

Auch für diese Curve kann eine parabolische Curve substituiert werden, deren Gleichung lautet:

$$\bar{\Phi}' = \frac{1}{2} \left[ 2 - \frac{v}{f} \left( 3 - \frac{v}{f} \right) \right] \dots 29^b)$$

Diese beiden Gleichungen auf das vorige Beispiel angewendet, ergeben sich folgende Resultate:

$\alpha$	Nach Gl. 29 <sup>a</sup> $\bar{\Phi}' =$	Nach Gl. 29 <sup>b</sup> $\bar{\Phi}' =$	Differenz
0	0.000 ton	0.000 ton	0 ton
10°	0.005 "	0.013 "	-0.008 "
20°	0.038 "	0.056 "	-0.018 "
30°	0.124 "	0.137 "	-0.013 "
40°	0.277 "	0.272 "	+0.005 "
50°	0.503 "	0.476 "	+0.027 "
60°	0.792 "	0.765 "	+0.027 "
$\alpha_0$	1.000 "	1.000 "	0

Aus der zweiten Horizontaldruck-Curve kann man leicht eine dritte Horizontalcurve ableiten, welche den horizontalen Kämpferdruck für eine Last = 1 Tonne, die einseitig und horizontal den Bogen belastet, angibt.

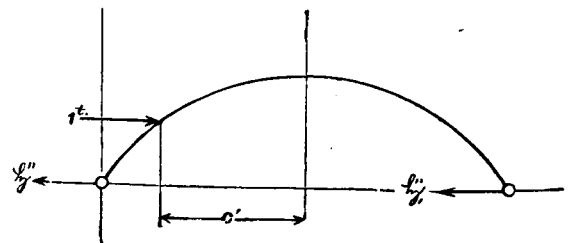


Fig. 4.

Ist nämlich der horizontale Widerstand des linken Kämpfers für eine bestimmte Lastlage  $= \bar{\Phi}''$  (Fig. 4) und

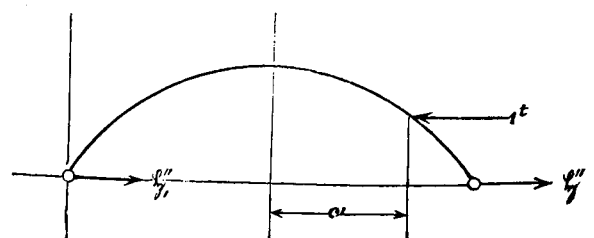


Fig. 5.

der horizontale Widerstand des rechten Kämpfers  $= \bar{\Phi}'_1$ , so muss, wenn auf der entgegengesetzten Seite des Bogens

in derselben Höhenlage eine zweite Kraft gleicher Grösse, jedoch im entgegengesetzten Sinne wirkend, gedacht wird, jetzt der Horizontalwiderstand des rechten Kämpfers  $= \mathfrak{H}''$  und jener des linken  $= \mathfrak{H}_1''$  sein. (Fig. 5) Kommen nun diese beiden Kräfte gleichzeitig zur Wirkung, so ist in jedem Kämpfer der Horizontalwiderstand  $\mathfrak{H}'' - \mathfrak{H}_1''$  thätig.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}' &= \mathfrak{H}'' - \mathfrak{H}_1'' \text{ und} \\ 1 &= \mathfrak{H}'' + \mathfrak{H}_1'', \text{ folglich} \\ \mathfrak{H}'' &= \frac{1 + \mathfrak{H}'}{2} \left\{ \dots \dots \dots 30 \right. \\ \text{und } \mathfrak{H}_1'' &= \frac{1 - \mathfrak{H}'}{2} \end{aligned}$$

Die mit den Werthen  $\mathfrak{H}''$  construierte Horizontaldruck-Curve ermöglicht die leichte Berechnung des Kämpferwiderstands für einseitig auf den Bogen wirkende horizontale Kräfte, also insbesondere für den Winddruck.

Mit Gleichung 29<sup>b</sup> ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}'' &= 1 - \frac{1}{4} \frac{v}{f} \left( 3 - \frac{v}{f} \right) \left\{ \dots \dots \dots 31 \right\} \\ \mathfrak{H}_1'' &= \frac{1}{4} \frac{v}{f} \left( 3 - \frac{v}{f} \right) \end{aligned}$$

Erproben wir die Genauigkeit der Gleichung 31, indem wir deren Resultate mit jenen, die mit Zuhilfenahme der Gleichung 29<sup>a</sup> erhalten werden, für unser früheres Beispiel vergleichen, so ergeben sich folgende Werthe:

$\alpha$	Gl. 30 u. 29 <sup>a</sup> $\mathfrak{H}'' =$	Gl. 31 $\mathfrak{H}'' =$	Differenz
0°	0.500	0.500	0.000
10°	0.502	0.506	-0.004
20°	0.519	0.528	-0.009
30°	0.562	0.568	-0.006
40°	0.639	0.636	+0.003
50°	0.752	0.738	+0.014
60°	0.896	0.882	+0.014
90°	1.000	1.000	0.000

## VI. Berechnung der Spannungen im steifen Bogen.

Es seien für den Querschnitt  $xy$  die Entfernungen der äussersten Schichten von der Schwerpunktsachse  $h_1$  beziehungsweise  $h_2$  und die Spannungen dortselbst  $N_1$  und  $N_2$ , so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} N_1 \frac{J}{h_1} &= M_{x_2} \\ N_2 \frac{J}{h_2} &= -M_{x_1} \end{aligned} \left\{ \dots \dots \dots 32 \right\}$$

und es bezeichnet

$M_{x_2}$  das Moment der äusseren Kräfte in Bezug auf den Kernpunkt  $x_2 y_2$  des Querschnitts und  $M_{x_1}$  desgleichen auf den Kernpunkt  $x_1 y_1$ .

Entsprechend der Gleichung 17 ist:

$$M_{x_1} = \mathfrak{M}_{x_1} + 2 H \frac{\sin \delta/2}{\cos \omega} (m_{x_1} - m_{y_1}) - H y_1 \text{ und}$$

$$M_{x_2} = \mathfrak{M}_{x_2} + 2 H \frac{\sin \delta/2}{\cos \omega} (m_{x_2} - m_{y_2}) - H y_2 *)$$

Die Differenz  $(m_x - m_y)$  ist nach Gleichung 16 nichts anderes als das stat. Moment bezüglich des Punktes  $xy$  von Kräften, welche an Stelle und in den Richtungen der Hängestangen an Bogen angreifen und deren Grösse je gleich Eins ist, wobei jedoch blos der verticale Widerstand der Stützen in Betracht kommt.

Durch Construction der diesen Kräften entsprechenden Stützlinie kann dann  $(m_x - m_y)$  leicht berechnet werden.

Man kann im vorliegenden Falle die Anordnung so treffen, dass das Polygon der Spannkette als Stützlinie erscheint.

Benennt man die constante Spannung der Polygonseiten mit  $\mathfrak{S}$ , so folgt mit der constanten Spannung der Hängestangen  $= 1$ ,

$$1 = 2 \mathfrak{S} \sin \delta/2 \text{ und}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2 \sin \delta/2}$$

Ist nun  $e_x$  der Hebelsarm der Spannung  $\mathfrak{S}$  in Bezug auf  $xy$ , so ist

$$\begin{aligned} m_x - m_y &= y \cdot \mathfrak{S} \cdot \cos \omega - \mathfrak{S} \cdot e_x \\ &= \mathfrak{S} (y \cos \omega - e_x) \\ &= \frac{1}{2 \sin \delta/2} (y \cos \omega - e_x) \end{aligned}$$

Demnach ist auch

$$M_{x_1} = \mathfrak{M}_{x_1} - H \frac{e_{x_1}}{\cos \omega}$$

$$M_{x_2} = \mathfrak{M}_{x_2} - H \frac{e_{x_2}}{\cos \omega}$$

Mit  $H = \frac{H_0}{C}$ , wobei mit Bezug auf Gleichung 27

$$C = 1 - \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} [\Sigma \mathfrak{S} \cos (n - z) \delta - \Sigma \mathfrak{S}' \sin (n - z) \delta] \dots 33$$

gesetzt erscheint, wird:

$$\begin{aligned} M_{x_1} &= \mathfrak{M}_{x_1} - H_0 \frac{e_{x_1}}{C \cdot \cos \omega} \\ M_{x_2} &= \mathfrak{M}_{x_2} - H_0 \frac{e_{x_2}}{C \cos \omega} \end{aligned} \left\{ \dots \dots \dots 34 \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Setzen wir } \frac{e_{x_1}}{C \cos \omega} &= \hat{e}_1 \\ \frac{e_{x_2}}{C \cos \omega} &= \hat{e}_2 \end{aligned} \left\{ \dots \dots \dots 35 \right\}$$

und denken wir für die äusseren verticalen Belastungen  $P_1 P_2 \dots$  ein Seilpolygon mit der Poldistanz  $H_0$  construiert, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{x_1} &= H_0 \eta_1 \\ \mathfrak{M}_{x_2} &= H_0 \eta_2 \end{aligned} \left\{ \dots \dots \dots 36 \right\}$$

wenn  $\eta_1$  und  $\eta_2$  die den Abscissen  $x_1$  und  $x_2$  entsprechenden

\*) Für einen einfachen Bogenträger mit unausweichbaren Kämpfern, der blos mit der äusseren Belastung  $P_1, P_2, P_3 \dots$  behaftet ist, wird

$$\begin{aligned} M'_{x_1} &= \mathfrak{M}_{x_1} - H_0 \eta_1 \\ M'_{x_2} &= \mathfrak{M}_{x_2} - H_0 \eta_2 \end{aligned}$$

Der Einfluss der Verschiedenheit der Construction, insbesondere die Wirkung der Hängestangen kann aus der Differenz

$$\begin{aligned} \Delta M_{x_1} &= M_{x_1} - M'_{x_1} \text{ beziehungsweise} \\ \Delta M_{x_2} &= M_{x_2} - M'_{x_2} \end{aligned}$$

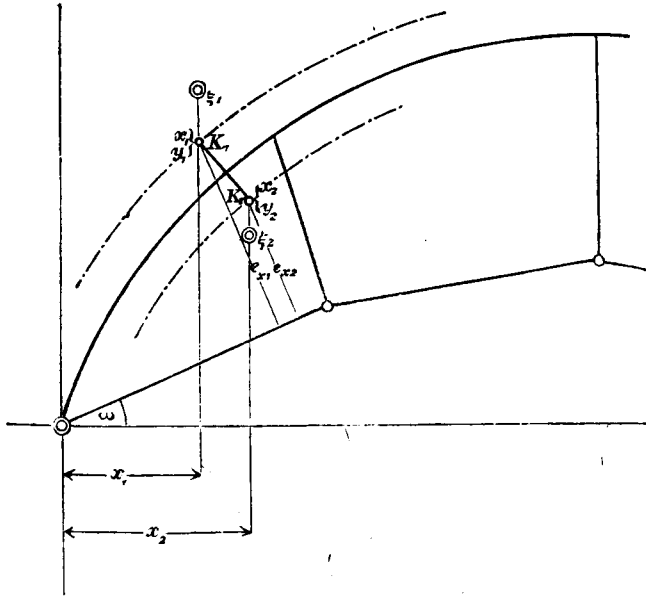
beurtheilt werden.

Abstände der Ordinaten zwischen Seilpolygon und dessen Schlusslinie bedeuten, und folglich:

$$\left. \begin{aligned} M_{x_1} &= H_0 (y_1 - \xi_1) = M_{\xi_1} \\ M_{x_2} &= H_0 (y_2 - \xi_2) = M_{\xi_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 37)$$

Werden nun in den Kernpunktordinaten Fig. 6 mehrerer Querschnitte von den Abscissenachsen aus die Abstände  $\xi_1$  und  $\xi_2$  aufgetragen so erhält man zwei Reihen von Punkten, welche jetzt dieselbe Rolle spielen, wie die Kernpunkte beim einfachen Bogenträger.

Fig. 6.



Aus Gleichung 32 folgt:

$$\left. \begin{aligned} N_1 \frac{J}{h_1} &= M_{\xi_2} \\ N_2 \frac{J}{h_2} &= -M_{\xi_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 38)$$

Als äussere Kräfte sind dann die Belastungen  $P_1 P_2 P_3 \dots$  einzuführen.

Der verticale Auflagerdruck links wird:

$$A = \frac{1}{l} \Sigma P(l - a) \text{ und der horizontale Kämpferdruck}$$

$$H_0 = \Sigma P \cdot \xi.$$

Berechnet man  $A$  und  $H_0$  und construirt für die horizontale, mit der Abscissenachse zusammenfallende Schlusslinie eine Seilcurve oder Stützlinie, so lassen sich einfach die Ordinatendifferenzen  $(y_1 - \xi_1)$  beziehungsweise  $(y_2 - \xi_2)$  der Grösse und dem Vorzeichen nach abnehmen und die Producte  $H_0 (y_1 - \xi_1)$  und  $H_0 (y_2 - \xi_2)$  bilden.

Die Ermittlung der ungünstigsten Belastung erfolgt mit Zuhilfenahme der Kämpferdrucklinie, wobei jedoch statt der Kernpunkte die Punkte  $\xi_1, \xi_2$  zu benutzen sind.

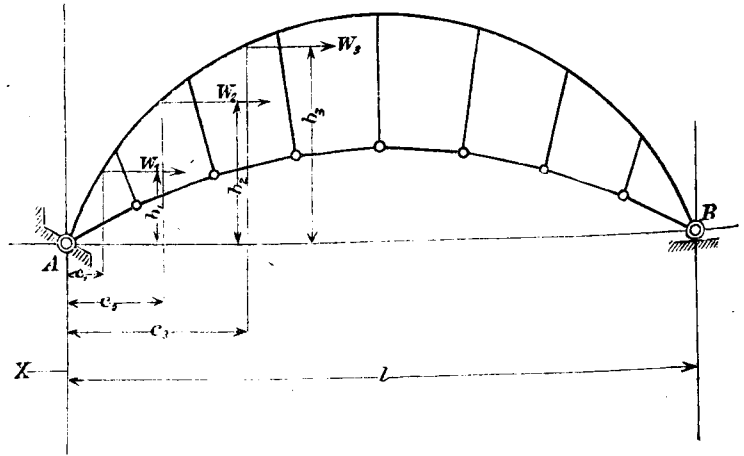
## VII. Widerstand der Dachbinder gegen äussere Horizontalkräfte.

Der nebenstehend in Fig. 7 dargestellte Dachbinder sei durch die horizontalen Kräfte  $W_1 W_2 W_3 \dots$ , die in Abständen  $b_1 b_2 b_3 \dots$  über der Abscissenachse angreifen, belastet. In Folge der Wirkung dieser Kräfte und der Elasticität der Construction wird das bewegliche Auf-

lager  $B$  nach rechts ausweichen und wir können analog der Gleichung 1 schreiben:

$$H''_w \cdot \Delta l = \Sigma S \cdot \Delta \lambda + \Sigma U \cdot \Delta \gamma, \dots \dots 39)$$

Fig. 7.



wenn

$H''_w$  der am rechten Kämpfer auftretende, die Spannweite affizirende Horizontalzug,

$S_1, S_2 \dots$  die Spannung der Kettenglieder,

$\Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2 \dots$  die Längenänderung derselben,

$U_1, U_2 \dots$  die Spannung der Hängestangen,

$\Delta \gamma_1, \Delta \gamma_2 \dots$  deren elastische Längenänderung und

$\Delta l$  die Längenänderung der Stützweite bedeutet.

Wir sehen vorläufig von den lothrechten Kräften der Schwere ab, alsdann sind an den Auflagern des Dachbinders und zwar in  $A$  die verticale nach abwärts gerichtete Kraft:

$$\frac{1}{l} \Sigma W \cdot b \text{ und die horizontale Kraft } \Sigma W,$$

in  $B$  die verticale aufwärts gerichtete Kraft  $\frac{1}{l} \Sigma W b$  als

Reactionen thätig.

Denken wir durch einen Schnitt, wie in Fig. 1  $abc$ , den steifen Bogen von der Kette getrennt und betrachten wir jeden dieser Theile gesondert, so gilt für die Spannung der Kettenglieder die Gleichung 13, für jene der Hängestangen Gleichung 14, und zwar ist:

$$S = \frac{H''_w}{\cos \omega} \dots \dots \dots 13^a$$

$$U = H''_w \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} \dots \dots 14^a$$

Am steifen Bogen wirken ausser den Kräften  $W$  noch die Spannungen  $U$  der Hängestangen, am linken Kämpfer somit die Reactionen vertical:

$$A = \frac{1}{l} \Sigma U (l - u) \cos (n - z) \delta - \frac{1}{l} \Sigma W b$$

$$A = H''_w \frac{2 \sin \delta/2}{l \cos \omega} \Sigma (l - u) \cos (n - z) \delta - \frac{1}{l} \Sigma W b \dots 40)$$

und horizontal:

$$H''_w = \Sigma W - H''_w \dots \dots \dots 41)$$

Für den Bogenträger ist — bei Vernachlässigung des Einflusses der Axialkraft —

$$\Delta l = \frac{1}{EJ} \int_{x=0}^{x=l} M_x y dx$$

und

$$M_x = H_w \cdot y + \frac{x}{l} \cdot H_w'' \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} \sum (l-u) \cos (n-z) \delta - \frac{x}{l} \sum W b - \sum_0^x W (y-b) - H_w'' \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} \sum_0^x (x-u) \cos (n-z) \delta - H_w'' \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} \sum_0^x (y-v) \sin (n-z) \delta$$

Setzt man, wie in 16

$$\frac{x}{l} \sum (l-u) \cos (n-z) \delta - \sum_0^x (x-u) \cos (n-z) \delta = m_x$$

$$\sum_0^x (y-v) \sin (n-z) \delta = m_y,$$

so wird

$$M_x = H_w y - \frac{x}{l} \sum W b - \sum_0^x W (y-b) + H_w'' \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} (m_x - m_y) \dots \dots \dots 42)$$

Da ferner

$$H_w = \sum W - H_w''$$

$$H_w'' = \frac{\sum W \cdot \int_{x=0}^{x=1} y^2 ds - \frac{1}{l} \sum W b \int_{x=0}^{x=1} x y ds - \int_{x=0}^{x=1} \sum_0^x W (y-b) y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds - \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} \left( \int_{x=0}^{x=1} m_x y ds - \int_{x=0}^{x=1} m_y y ds \right) + \frac{J}{\cos^2 \omega} \left[ \frac{2 \lambda n}{F} + \frac{4 \sin^2 \delta/2}{F^2} \sum \eta \right]} \dots \dots \dots 44)$$

Wird Zähler und Nenner mit

$$\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds$$

dividiert und beachtet, dass nach Gleichung 20, 21, 25 u. 26

$$\frac{\int_{x=0}^{x=1} m_x y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds} = H'_0 = \sum \delta \cos (n-z) \delta$$

$$\frac{\int_{x=0}^{x=1} m_y y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds} = H''_0 = \sum \delta \sin (n-z) \delta$$

wird, so ergibt sich

$$H_w'' = \frac{\sum W - \frac{1}{l} \sum W b \frac{\int_{x=0}^{x=1} x y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds} - \frac{\int_{x=0}^{x=1} \sum_0^x W (y-b) y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds}}{1 - \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} \left( \sum \delta \cos (n-z) \delta - \sum \delta \sin (n-z) \delta \right) + \frac{J}{\cos^2 \omega} \left( \frac{2 \lambda n}{F} + \frac{4 \sin^2 \delta/2}{F^2} \sum \eta \right)} \dots \dots \dots 45)$$

ist, so ist auch:

$$M_x = y (\sum W - H_w'') - \frac{x}{l} \sum W b - \sum_0^x W (y-b) + H_w'' \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} (m_x - m_y) \dots \dots \dots 42a)$$

Hiernach wird

$$E J \Delta l = \sum W \int_{x=0}^{x=1} y^2 ds - H_w'' \int_{x=0}^{x=1} y^2 ds - \frac{1}{l} \sum W b \int_{x=0}^{x=1} x y ds - \left( \int_{x=0}^{x=1} \sum_0^x W (y-b) \cdot y ds + H_w'' \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} \left( \int_{x=0}^{x=1} m_x y ds - \int_{x=0}^{x=1} m_y y ds \right) \right) \dots 43)$$

und da aus Gleichung 39

$$E \Delta l = \frac{H_w''}{\cos^2 \omega} \cdot \frac{2 \lambda n}{F} + H_w'' \frac{4 \sin^2 \delta/2}{F^2 \cos^2 \omega} \sum \eta = \frac{H_w''}{\cos^2 \omega} \left[ \frac{2 \lambda n}{F} + \frac{4 \sin^2 \delta/2}{F^2} \sum \eta \right]$$

folgt, so ergibt sich mit 42 für  $H_w''$  die Beziehung:Für einen einfachen Bogenträger, dessen Kämpfergelenke auf unnachgiebigen Widerlagern ruhen, und der bloß durch die Kräfte  $W$  affiziert ist, findet sich unschwer die horizontale Reaction des linken Kämpfers mit

$$H_w' = \frac{\frac{1}{l} \sum W b \int_{x=0}^{x=1} x y ds + \int_{x=0}^{x=1} \sum_0^x W (y-b) y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds} \quad \text{und hieraus}$$

$$H_w'' = \sum W - H_w'$$

$$= \sum W - \frac{\frac{1}{l} \sum W b \int_{x=0}^{x=1} x y ds + \int_{x=0}^{x=1} \sum_0^x W (y-b) y ds}{\int_{x=0}^{x=1} y^2 ds} \dots \dots 46)$$





und der horizontale Druck auf die Dachfläche zwischen  $y = b_1$  und  $y = b_2$

$$W = \int_{y=b_1}^{y=b_2} w_{ny} \cdot dy = \text{area }qrst \dots\dots\dots 53)$$

#### IX. Einfluss des Winddruckes auf die Beanspruchung der Dachbinder.

Wir setzen zunächst voraus, dass das feste Auflager an der dem Winddruck ausgesetzten Seite befindlich sei, alsdann ist der linkseitige verticale Auflagerdruck:

$$A = \frac{1}{l} \Sigma V(l-c) - \frac{1}{l} \Sigma W \cdot b$$

und der horizontale Widerstand dieses Auflagers:

$$H = \Sigma W,$$

wobei der Reibungswiderstand des beweglichen Auflagers ausser Acht gelassen ist.

Zur Bestimmung der durch den Winddruck hervorgerufenen Kettenspannung denken wir die Kette durch einen Schnitt  $abc$  vom Bogen abgetrennt; alsdann ist für dieselbe der horizontale Kämpferdruck des rechten Auflagers maassgebend.

Dieser ist nach 27, 33 und 47

$$H''_w = \frac{1}{C} (H_0 + H''_{w_0}) = \frac{1}{C} \left\{ \Sigma V \cdot \Phi + \Sigma W \Phi''_1 \right\} \text{ und}$$

$$S = \frac{1}{C} \frac{\Sigma V \cdot \Phi + \Sigma W \cdot \Phi''_1}{\cos \omega} \dots\dots\dots 54)$$

Die Spannung der Hängestangen ist:

$$U = \frac{1}{C} \cdot \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} (\Sigma V \cdot \Phi + \Sigma W \cdot \Phi''_1) \dots\dots\dots 55)$$

Am steifen Bogen wirkt linkseitig der verticale Kämpferdruck:

$$A = \frac{1}{l} \Sigma V(l-c) + \frac{1}{l} \Sigma U(l-u) - \frac{1}{l} \Sigma W \cdot b$$

und der horizontale Widerstand:

$$\begin{aligned} -H &= \frac{1}{C} (H_0 + H''_{w_0}) - \Sigma W \\ &= \frac{1}{C} \left\{ \Sigma V \Phi + \Sigma W \cdot \Phi''_1 \right\} - \Sigma W \dots\dots\dots 56) \end{aligned}$$

Für einen Querschnitt durch  $xy$  ergeben sich die Spannungen der äussersten Schichten aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} N_1 \frac{J}{h_1} &= A_{x_2} - H_{y_2} - \sum_0^{x_2} V(x_2-c) - \sum_0^{x_2} W(y_2-b) - \sum_0^{x_2} U(x_2-u) \cos(n-z) \delta - \sum_0^{x_2} U(y_2-v) \sin(n-z) \delta \\ -N_2 \frac{J}{h_2} &= A_{x_1} - H_{y_1} - \sum_0^{x_1} V(x_1-c) - \sum_0^{x_1} W(y_1-b) - \sum_0^{x_1} U(x_1-u) \cos(n-z) \delta - \sum_0^{x_1} U(y_1-v) \sin(n-z) \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 57$$

$x_1 y_1$  und  $x_2 y_2$  sind hierbei die Coordinaten des oberen und beziehungsweise unteren Kernpunktes im Querschnitte.

Und endlich noch zu erfahren ob das feste Auflager mit dem Mauerwerke zu verankern sein wird, ist zu untersuchen ob

$$\Sigma W < \frac{\mu}{l} \left( \Sigma V(l-c) - \Sigma W b + \Sigma P_0(l-a) \right) \dots\dots\dots 58)$$

wobei die  $P_0$  sich auf das Eigengewicht der Construction sammt Eindeckung bezieht, und  $\mu$  der Reibungs-Coëfficient am Auflager ist.

Bei Gültigkeit des unteren Zeichens würde selbstverständlich eine Verankerung nothwendig werden.

#### Beispiel.

Es soll für einen bogenförmigen Dachbinder von 42.0m Lichtweite die Spannung der Kette und der Hängestangen berechnet werden. Gegeben ist die kreisförmige Bogenachse des als vollwandigen Bogenträger zu construirenden Binders und die Bedingung, dass über der Bogensehne ein Raum dessen Höhe in der Bindermitte circa  $\frac{3}{5}$  der Pfeilhöhe beträgt, frei gehalten werden soll.

Die Pfeilhöhe der Bogenachse beträgt 14.0m, somit wird der Pfeil des Kettenpolygons mit  $f' = \frac{3}{5} \cdot 14 = 8.4$ m bemessen werden.

Die Stützweite des Bogens nehmen wir mit  $l = 42.8$ m an, alsdann berechnet sich der Radius des Kreisbogens

$$r = 23.355\text{m},$$

und der halbe Centriwinkel mit

$$\sphericalangle \alpha_0 = 66^\circ 23' 23'', \text{ so dass}$$

$$\sin \alpha_0 = 0.9163$$

$$\cos \alpha_0 = 0.4006 \text{ und}$$

$$\text{arc. } \alpha_0 = 1.1586 \text{ sich ergibt.}$$

Für die Kette, deren Stützweite

$$l = 42.8\text{m} \text{ und deren Pfeilhöhe}$$

$$f' = 8.4\text{m}, \text{ berechnet sich der Radius}$$

des dem Kettenpolygon umschriebenen Kreises mit

$$r_1 = 31.459\text{m}$$

und der halbe Centriwinkel desselben mit

$$\sphericalangle \alpha_1 = 42^\circ 51' 44''.$$

Wir wollen die Kette mit 16 Gliedern anordnen, so dass  $n = 8$  und

$$\sphericalangle \delta = \frac{\sphericalangle \alpha_1}{8} = 5^\circ 21' 28''$$

$$\sphericalangle \frac{\delta}{2} = 2^\circ 40' 44'' \text{ wird.}$$

Hiefür ist

$$\sin \frac{\delta}{2} = 0.046.738, \text{ und da}$$

$$\omega = \alpha_1 - \frac{\delta}{2} = 40^\circ 11'$$

$$\cos \omega = 0.76398.$$

Die erste Aufgabe besteht nun in dem Auftragen der Horizontaldruck - Curven. Die Horizontaldruck - Curve für verticale Kräfte wurde mittelst der Gleichung 28<sup>a</sup>, jene für symmetrisch angreifende Horizontal - Kräfte mittelst Gleichung 29<sup>b</sup> berechnet.

Es ergeben sich hienach die folgenden Werthe:

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	$\alpha_0$
$\Phi =$	0.546	0.526	0.465	0.374	0.266	0.153	0.052	0
$\Phi' =$	0	0.005	0.038	0.124	0.277	0.503	0.792	1.000

Mit denselben werden die beiden Curven  $\Phi$  und  $\Phi'$  aufgetragen (siehe Fig. 9) und die Summen

$$\Sigma \Phi \cos (n-z) \delta \text{ und } \Sigma \Phi' \sin (n-z) \delta$$

gebildet, indem für den Angriffspunkt einer jeden Hängestange in der Achse des steifen Bogens der entsprechende Werth  $\Phi$  bzw.  $\Phi'$  aus den Horizontaldruck-Curven entnommen und durch Construction oder Rechnung der jeweilige Werth

$$\Phi \cos (n-z) \delta \text{ und } \Phi' \sin (n-z) \delta$$

ermittelt wird.

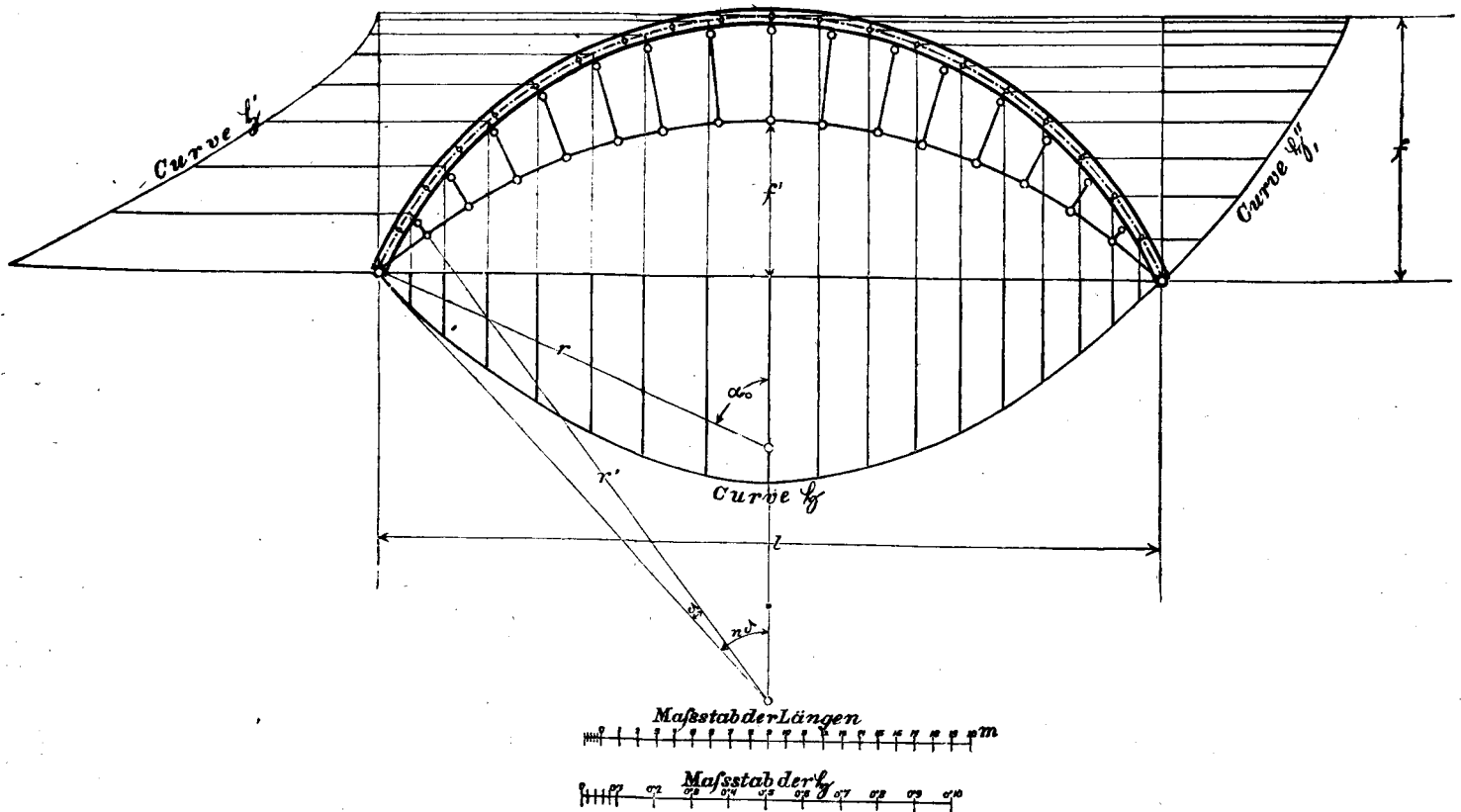
Zur Bestimmung des Werthes  $C$  nach Gleichung 33 haben wir:

$$C = 1 - \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} \left( \Sigma \Phi \cos (n-z) \delta - \Sigma \Phi' \sin (n-z) \delta \right)$$

folglich:

$$C = 1 - \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} (4.782 - 0.962) = 1 - 3.82 \frac{2 \sin \delta/2}{\cos \omega} = 1 - 3.82 \frac{2 \times 0.046738}{0.76398} = 0.533.$$

Fig. 9.



So wurde gefunden:

$$\begin{aligned} \text{Für } z=1, \Phi_1 \cos (n-1) \delta &= \Phi_1 \cos 7 \delta = 0.055 \\ z=2, \Phi_2 \cos (n-2) \delta &= \Phi_2 \cos 6 \delta = 0.130 \\ z=3, \Phi_3 \cos (n-3) \delta &= \Phi_3 \cos 5 \delta = 0.218 \\ z=4, \Phi_4 \cos (n-4) \delta &= \Phi_4 \cos 4 \delta = 0.313 \\ z=5, \Phi_5 \cos (n-5) \delta &= \Phi_5 \cos 3 \delta = 0.402 \\ z=6, \Phi_6 \cos (n-6) \delta &= \Phi_6 \cos 2 \delta = 0.475 \\ z=7, \Phi_7 \cos (n-7) \delta &= \Phi_7 \cos \delta = 0.525 \\ z=8, \Phi_8 \cos (n-8) \delta &= \Phi_8 \cos 0 = 0.546 \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Anordnung der Hängestange haben wir:

$$\Sigma \Phi \cos (n-z) \delta = 2 \sum_{z=1}^{z=7} \Phi \cos (n-z) \delta + \Phi_8 \cos 0 = 4.236 + 0.546 = 4.782$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \text{Für } z=1, \Phi'_1 \sin (n-1) \delta &= \Phi'_1 \sin 7 \delta = 0.455 \\ z=2, \Phi'_2 \sin (n-2) \delta &= \Phi'_2 \sin 6 \delta = 0.275 \\ z=3, \Phi'_3 \sin (n-3) \delta &= \Phi'_3 \sin 5 \delta = 0.140 \\ z=4, \Phi'_4 \sin (n-4) \delta &= \Phi'_4 \sin 4 \delta = 0.064 \\ z=5, \Phi'_5 \sin (n-5) \delta &= \Phi'_5 \sin 3 \delta = 0.022 \\ z=6, \Phi'_6 \sin (n-6) \delta &= \Phi'_6 \sin 2 \delta = 0.005 \\ z=7, \Phi'_7 \sin (n-7) \delta &= \Phi'_7 \sin \delta = 0.001 \\ z=8, \Phi'_8 \sin (n-8) \delta &= \Phi'_8 \sin 0 = 0.000 \\ \Sigma \Phi' \sin (n-z) \delta &= 0.962 \end{aligned}$$

Nach Gleichung 27 ist dann

$$H = \frac{H_n}{C} = \frac{H_0}{0.533} = 1.88 H_0 = 1.88 \Sigma P \cdot \Phi,$$

womit der Horizontaldruck der Kämpfer für alle verticalen Belastungen des Bogens bestimmt ist. Der Coëfficient 1.88 drückt den Einfluss der Spannkette und der Hängestangen aus.

Für die weitere Ausführung der Berechnungen ist es bequem, wenn die Belastungen in den Orten, wo die Pfetten befestigt sind, concentrirt wirkend angenommen werden. Dann hat man es bloß mit isolirten Lasten zu thun und kann in einfachster Weise aus der Horizontaldruck-Curve  $\Phi$  die Summe  $\Sigma P \cdot \Phi$  ermitteln.

Schluss.

Aus dem vorgeführten Beispiele erkennt man, dass  $H$  sehr bedeutend grösser ist als  $H_0$ , dass also die Spannkette jedenfalls einen viel grösseren Materialaufwand erfordern wird, als eine horizontale Bogenschliesse.

Je grösser die Pfeilhöhe der Spannkette ist, desto grösser wird sich nothwendigerweise der Coëfficient  $\frac{1}{C}$

und damit auch  $H$  ergeben. Es folgt daraus, dass man diese Pfeilhöhe so klein als möglich machen soll.

Auch die Anzahl der Polygonsecken der Spannkette ist von Einfluss auf  $C$ . Je kleiner  $n$  desto grösser wird  $C$ , so dass für  $n=1$ , also mit bloss einer (mittleren) Hängestange, in unserem Beispiele  $\frac{1}{C} = 1.74$  sich ergeben würde. Da-

gegen hat im letzteren Falle die Hängestange eine sehr beträchtliche Spannung. Während im ersten Falle mit  $n=8$ ,

$$U = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\cos \omega} H = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\cos \omega} \frac{H_0}{C} = 1.80 H_0 \frac{2 \sin \frac{\delta}{2}}{\cos \omega} = 0.23 H_0$$

ist, haben wir im zweiten Falle mit  $n=1$

$$U = 2 \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cdot H = 2 \times 1.74 H_0 \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{8.4}{21.4} = 0.392$$

$$U = 1.36 H_0$$

Es wird demnach in diesem Falle der Bogen mit einer verhältnissmässig grossen und ungünstig wirkenden Kraft behaftet erscheinen, wogegen bei grösseren  $n$  die Spannungen der Hängestangen den Bogen gleichmässig an mehreren Punkten belasten, wodurch derselbe allerdings auch grössere Spannungen zu erleiden haben wird, als der Bogen mit horizontaler Schliesse, gegen welchen er jedoch wieder eine grössere Steifigkeit voraus hat.

## Ueber Sanddruck und Bewegungserscheinungen im Innern trockenen Sandes.

Von Privatdocent Ph. Forchheimer in Aachen.

(Mit Zeichnungen auf Blatt 34.)

### I. Druck des Sandes auf einem beweglichen Bodentheil.

#### 1. Geschichtliche Angaben.

Die ersten Versuche über das mechanische Verhalten des Sandes machte 1788 Delanges in Verona, welcher auch eine Abhandlung über die Statik und Mechanik halbfüssiger Körper veröffentlichte.\*)

Ebenso stellte später Huber-Burnand in Genf Beobachtungen an und gelangte dabei zu folgenden Sätzen:

a) Die Ausflussgeschwindigkeit von Sand aus einem Gefässe ist von der Sandhöhe unabhängig und in der Mitte der Oeffnung grösser als an den Rändern. Die Ausflussmenge wird durch eine Belastung des Sandes nicht vergrössert.

b) Sand, welcher in einen Arm einer gebogenen Glasröhre gegossen wird, steigt im andern Arme nicht empor.

c) Ausgeflossener Sand stellt sich gewöhnlich unter einem Winkel von  $30^\circ$  bis  $33^\circ$  mit der Horizontalen ein, selten unter  $35^\circ$ . Es ist dieses der Winkel, welcher gegenwärtig mit dem Namen: „Neigungswinkel der natürlichen Böschung“ bezeichnet wird und der dem Reibungswinkel von Sand auf Sand gleich ist.

d) Wird eine gebogene Röhre theilweise mit Quecksilber gefüllt und dann in einen Arm Sand nachgegossen, so steigt das Quecksilber im anderen Arme nicht in die Höhe.\*\*)

Thatsächlich ist der Bodendruck des Sandes jedoch nicht Null, sondern nur zu gering, um grössere Niveauunterschiede zu bewirken.

Versuche von Moreau, bei welchen der Druck gemessen wurde, der eine bewegliche Bodenklappe zum Absturz bringt, zeigten, dass bei Anwendung trockenen Sandes dieser Druck von der Höhe der Schüttung und einer eventuellen Belastung des Sandes im Wesentlichen unabhängig sei. Leider hat es Moreau unterlassen, die Grösse dieser Drücke anzugeben.

Moreau und Gauzence schlossen aus weiteren Beobachtungen, dass sich nasser Sand ähnlich verhalte,

\*) So entnimmt der Verfasser, dem die Schrift selbst unzugänglich blieb, den Annales des ponts et chaussées, 1835, 2 Sem., S. 179.

\*\*) Annales de chimie et de physique, 1829, p. 129 u. f.

ebenfalls ohne diese Mittheilung durch Zahlenangaben zu vervollständigen.

Niel, der mit nassem Sande und Ackererde experimentirte, fand hingegen, dass eine Belastung den Bodendruck sehr bedeutend erhöhe, sobald die Oeffnung eine hinreichende Grösse besitzt.\*)

Hier muss bemerkt werden, dass das Verhalten von trockenem und nassem Sande jedenfalls ein ganz verschiedenes ist; zu technischen Zwecken, wenn es sich um den Nachweis der Tauglichkeit von Sandfundirungen handelt, sind Versuche mit nassem Material gewiss mit am Platze, einen Einblick in die mechanischen Vorgänge können aber zunächst nur Beobachtungen an trockenem Sande gewähren.

Versuche, welche Hagen vor etwa fünfzig Jahren mit trockenem Sande durchführte, bestätigen die Unabhängigkeit des Bodendruckes von der Höhe.\*\*)

Endlich veröffentlichte, nachdem über die Arbeiten, welche dieser Schrift zu Grunde liegen, eine vorläufige Mittheilung im Aachener Bezirks-Verein des Vereins deutscher Ingenieure bereits erfolgt war\*\*\*), Engesser das Ergebniss von Druckmessungen, welche er bei trockenem Sande vorgenommen hatte.†)

#### 2. Beschreibung der verwendeten Sandsorten.

Zu den Versuchen wurde trockener Rheinsand, Bleischrot und sogenannter Goldstreusand verwendet. Das specifische Gewicht des trockenen Rheinsandes an und für sich betrug 2.65; lose geschichtet ergab sich für die Schüttung 1.43 bis 1.46 und festgestampft 1.59 bis 1.60, so dass im Folgenden das specifische Gewicht zu  $\sigma = 1.445$  angesetzt erscheint. Der Neigungswinkel der natürlichen Böschung wurde an sorgfältig aufgeschütteten Sandkegeln

\*) Annales des ponts et chaussées, 1835, 2 Sem. pag. 171 u. f.

\*\*) Pogg. Ann. 1833, Bd. XXVIII S. 17 und 297 u. f., sowie Handbuch der Wasserbaukunst, II. Bd. §. 33.

\*\*\*) Bericht des Aachener Bezirks-Vereines deutscher Ingenieure über die Vereins-Versammlung vom 3. August 1881. — „Wochenschrift des Vereines deutscher Ingenieure“ vom 11. Februar 1882.

†) „Deutsche Bauzeitung“ vom 25. Februar 1882. „Ueber den Erddruck gegen innere Stützwände (Tunnelwände)“.

zu  $33^{\circ} 40'$  bestimmt. Der Sand war vollständig cohäsionslos und anscheinend sehr rein, doch ergab ein zwei Stunden andauerndes Schlämmen zweier Proben Gewichtsverluste von 1.20% beziehungsweise 1.37%.

Als Material von geringem Reibungswinkel diente Bleischrot (Vogeldunst) mit einem specifischen Gewichte der Schüttung von 6.91 und einem Neigungswinkel der natürlichen Böschung von  $26^{\circ} 00'$ .

Zur Controle der im Folgenden entwickelten Formeln eignete sich ferner ein aus Metallplättchen bestehender Goldstreusand, welcher die steile Neigung der natürlichen Böschung von  $42^{\circ} 50'$  besass und nur in sehr loser Schüttung vom specifischen Gewichte 0.86 verwendbar war, da sich sonst Cohäsionserscheinungen zeigten.

### 3. Beschreibung der Vorrichtungen zum Messen des Druckes auf eine Bodenklappe.

Es wurden die Versuche bei grösseren und kleineren Oeffnungen getrennt durchgeführt und dienten hiezu je ein Gefäss zur Aufnahme des Sandes und eine Wage zur Druckmessung.

Fig. A.

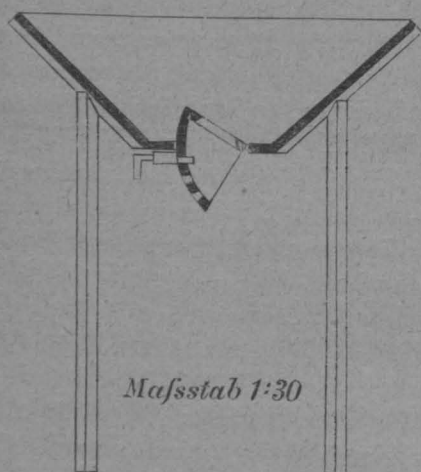
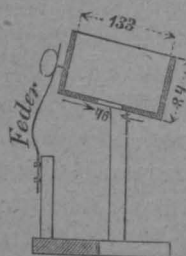


Fig. C.

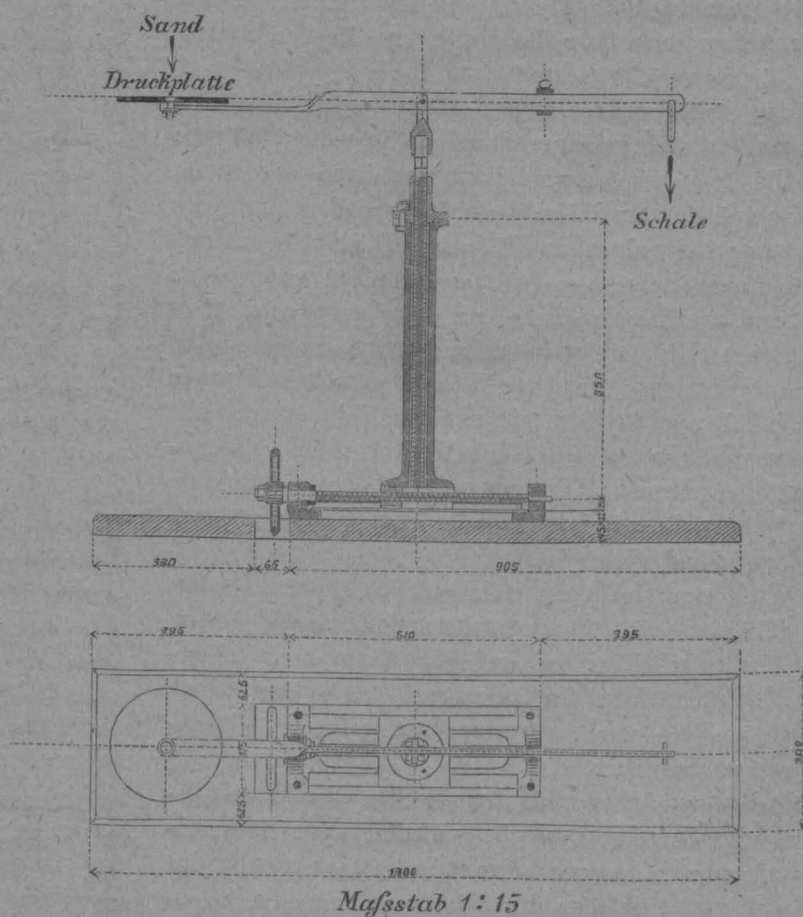


beliebigen Winkel in den Kasten hineindreihen liess, während die anderen drei Plattenseiten Abschlussflächen — zwei Kreisausschnitte und ein Cylindermantelstück — trugen, so dass seitlich von der Platte kein Sand herunterrutschen konnte. Für die Feststellung der Platte unter der gewünschten Neigung war durch Löcher im Cylindermantelstück und einem Dübel gesorgt, und endlich dienten Leinwandlappen zur Abdichtung der Fugen zwischen dem beweglichen Bodentheile und dem Rahmen.

In der quadratischen Platte befand sich eine kreisförmige Oeffnung von  $20\text{cm}$  Durchmesser, die sich durch Einlegen zweier hölzerner Ringe auf  $15\text{cm}$ , beziehungsweise  $10\text{cm}$  Durchmesser reduciren liess; die Brettstärke der Platte und der Ringe mass  $2\text{cm}$  und die Oeffnungsränder waren unter  $45^{\circ}$  conisch abgeschragt.

Die zugehörige Wage, wie sie durch Fig. B dargestellt wird, besass einen eisernen, gleicharmigen Wagebalken, welcher an einem Ende eine runde Platte trug, auf welcher der Sand zu drücken hatte, während am anderen Ende die Schale zur Aufnahme der Gewichte hing. Eine horizontale Verschiebschraube und die mit Gewinden ver-

Fig. B.



Das grössere Gefäss (siehe Fig. A) war ein Holzkasten in Gestalt einer abgestumpften Pyramide von quadratischen Grundflächen, und zwar betrug die Seitenlänge der oberen Basis  $160\text{cm}$ , die der unteren  $50\text{cm}$  und die Höhe  $51\text{cm}$ . Die untere Grundfläche selbst bestand aus einem festen äusseren Rahmen und einer inneren quadratischen Platte von  $36\text{cm}$  Seitenlänge, welche an einer ihrer Kanten durch ein Charnier an den Rahmen befestigt war, so dass sie sich um einen

sehene Wagsäule ermöglichten die genaue Aufstellung, und das Gleichgewicht für die betreffende Neigung des Wagebalkens liess sich durch Belastung der Wageschale und Verschiebung eines Laufgewichtes herstellen. Die zunächst verwendete Druckplatte der Wage war grösser als die Oeffnung des Sandkastens; später wurde mit einer kleineren Platte gearbeitet, welche durch die Bodenöffnung von  $20\text{cm}$  Durchmesser durchkonnte, und statt der oben erwähnten

hölzernen Ring fungirten dann dünne Eisenplatten mit den betreffenden Oeffnungen.

Der kleinere Sandkasten (Fig. C) war parallelepipedisch, 84<sup>mm</sup> hoch, 133<sup>mm</sup> breit, 170<sup>mm</sup> lang, liess sich um eine horizontale Achse drehen, sowie unter verschiedenen Neigungen festklemmen, und sein Boden enthielt eine Oeffnung von 126<sup>mm</sup> Länge auf 46<sup>mm</sup> Breite, innerhalb welcher die Druckplatte der Wage frei spielen konnte. Sollte der Druck auf eine bestimmte Bodenöffnung gemessen werden, so wurde auf den Kastenboden eine Weissblechplatte gelegt, welche mit dem betreffenden Loch versehen war. Die Wage war ähnlich construiert, wie die oben beschriebene, nur in den Dimensionen viel kleiner und ohne verticale und horizontale Schraube; dafür war die Wagsäule in einer auf drei Füßen stehenden Hülse verschiebbar und konnte mit einer Stellschraube in der beabsichtigten Höhenlage festgeklemmt werden.

#### 4. Methode der Druckmessung.

Zunächst wurde die Wagschale immer genügend belastet und dann vorsichtig das Gewicht vermindert, bis der Wagbalken kippte und der Sand abstürzte. Der kleinere Apparat erhielt im Allgemeinen nach jeder Messung eine frische Füllung; bei dem grösseren wurde meistens gleich nach erfolgtem Absturze die Druckplatte gegen den Sand gedrückt und von Hand hin- und hergeschoben, bis sie dicht gegen den Kastenboden schloss, also kein Sand mehr durchrutschte, so dass nur der an der Sandoberfläche entstandene grössere oder kleinere Trichter wieder aufgefüllt werden musste. Hierbei zeigte es sich, dass bei dem Hin- und Herschieben ein stärkeres Gegenpressen der Druckplatte eine Erhöhung des Bodendruckes zur Folge hatte, so dass es wahrscheinlich ist, dass der kleinere Apparat die genaueren Resultate lieferte.

Bei den Versuchen mit Bleischrot veranlasste die kleinste Erschütterung den Absturz, so dass ein Abheben der Gewichte vermieden werden musste. Nach dem ähnlichen Vorgange Hagen's wurde die Wagschale durch einen Trichter ersetzt, welcher mit Sand gefüllt war und eine Oeffnung besass, durch die der Sand in einem feinen Strahle auslief, bis der Absturz erfolgte, worauf der Auslauf sofort unterbrochen und das Gewicht des zurückgebliebenen Trichter-Inhaltes bestimmt wurde.

Einige auf diese Weise ausgeführte Controlwägungen zeigten, dass beim Rheinsand ein Abheben der Gewichte von Hand gestattet sei.

#### 5. Druck auf eine horizontale kreisförmige Bodenöffnung.

Aus der Beobachtung, dass der Druck von der Höhe der im Gefässe befindlichen Sandmenge unabhängig ist, folgt, dass er dem Gewichte eines Körpers von bestimmter Gestalt entsprechen muss, welcher die Bodenöffnung zur Basis hat, oder mit anderen Worten, dass er mit der dritten Potenz des Durchmessers  $d$  der Bodenöffnung wachsen muss, — es stimmt dieses mit Hagen's Auffassung überein. Dividirt man den gemessenen Druck durch  $d^3$  (wobei  $d$  in Centimetern ausgedrückt werden soll), so erhält man den Druck auf eine Oeffnung von 1<sup>cm</sup> Durchmesser.

Die Versuche ergaben folgendes Resultat:

Rheinsand.

Tab. 1.

Durchmesser der Oeffnung cm.	Höhe des Sandes cm.	Zahl der Versuche	Mittlerer Werth des Druckes Gramm	Entsprechender Druck auf eine Kreisfläche von 1 cm. Durchmesser. Gramm
20	51	38	3213	0,402
"	41	24	3086	0,386
"	31	20	3314	0,414
15 (Holzring)	51	59	1331	0,391
"	41	20	1399	0,415
"	31	20	1324	0,392
15 (Blech)	51	20	1377	0,408
"	31	20	1302	0,386
10	51	20	371	0,371
"	31	20	378	0,378
2,66	8	20	7,335	0,390
2,12	8	20	3,920	0,411
Summe...		301		0,3956

Bleischrot.

Tab. 2.

Durchmesser der Oeffnung cm.	Höhe des Sandes cm.	Zahl der Versuche	Mittlerer Werth des Druckes Gramm	Entsprechender Druck auf eine Kreisfläche von 1 cm. Durchmesser. Gramm
2,12	8	2	16,67	
"	7	2	17,19	
"	5 bis 6	2	18,92	
"	4	2	17,71	
"	3	2	18,94	
Summe...		10	17,886	1,877

Goldstreusand.

Tab. 3.

Durchmesser der Oeffnung cm.	Höhe des Sandes cm.	Zahl der Versuche	Mittlerer Werth des Druckes Gramm	Entsprechender Druck auf eine Kreisfläche von 1 cm. Durchmesser. Gramm
2,66	6	10	4,410	0,234

Hier sollen auch die einzigen hierher gehörigen älteren Versuche, für welche Zahlenangaben vorliegen, diejenigen Hagen's — auf metrisches Maass umgerechnet — wieder gegeben werden.

Sie betreffen eisenhaltigen Streusand, welcher gereinigt benutzt wurde und bei der Reinigung das spezifische Gewicht der Schüttung von 2,30 auf 2,37 erhöhte\*), und dessen Reibungswinkel sich einerseits als Neigungswinkel der natürlichen Böschung zu 32° 30', andererseits bei Messung mittelst über einander gleitenden Kasten zu 23° 51' bis 26° 25' ergab.\*\*)

Die resultirenden Daten sind die folgenden:

Eisenhaltiger Streusand.

Tab. 4.

Durchmesser der Oeffnung cm	Entsprechender Druck auf eine Kreisfläche von 1 cm. Durchmesser Gramm
0,991 } 1,901 }	0,664 bis 0 750

Endlich hat Engesser den Druck auf eine runde Klappe von 5<sup>cm</sup> Durchmesser bestimmt und den kleinsten

\*) Handbuch der Wasserbaukunst, Bd 2, §. 83.

\*\*) Winkler, neue Theorie des Erdruckes, S. 128, bevorzugt den Werth von 32° 30'.

von ihm beobachteten Druck angegeben, welches Verfahren deswegen von ihm befolgt wurde, weil es sich in seiner Arbeit um eine Theorie zur Berechnung des kleinsten möglichen Bodendruckes handelte. Der betreffende Streusand hatte einen Reibungswinkel von  $36^{\circ} 30'$  und ein spezifisches Gewicht 1.5.

Streusand.

Tab. 5.

Durchmesser der Oeffnung	Höhe des Sandes	Minimaldruck	Entsprechender Minimaldruck bei 1 cm. Durchmesser
cm.	cm.	Gramm	Gramm
5	30	34	0,272

#### 6. Druck auf horizontale rechteckige Bodenöffnungen.

Die Messungen erfolgten auf dieselbe Weise, wie früher bei kreisförmiger Oeffnung, und das betreffende Viereck war jedesmal in einer Weissblechplatte eingeschnitten.

Die Resultate sind in Tabelle 6 zusammengestellt;  $s$  und  $s_1$  bedeuten die Seitenlängen des Rechteckes.

Tab. 6.

$s$	$s_1$	Höhe der Schüttung	Zahl der Versuche	Mittlerer Werth des Druckes	Mittlerer Gesamtdruck
in cm.	in cm.	cm.		gramm	gramm
10	10	51	20	515	512
"	"	41	20	515	
"	"	31	20	506	
1,97	5,86	6 bis 8	8	15,82	15,59
"	"	5 " 6	20	15,50	
2,10	4,11	5 " 8	20	12,32	
2,02	2,04	5 " 8	20	4,54	

Die ähnlichen Engesser'schen Versuche können hier angeführt werden, wieder mit dem Bemerken, dass Engesser nicht den mittleren Werth seiner Messungen, sondern jedesmal den kleinsten von ihm beobachteten Druck angibt.

Engesser's Beobachtungen lieferten:

Tab. 7.

$s$	$s_1$	Höhe der Schüttung	Minimaldruck
in cm.	in cm.	cm.	Gramm
20	4	40	150
"	"	15	150
"	"	6	180
"	2,2	40	52*

Zu erwähnen ist, dass längs der Seite  $s$  Sand an Sand grenzte, während längs  $s_1$  Glastafeln aufgestellt waren.

#### 7. Beobachtung der Bewegungen im Innern des Sandkörpers beim Absturz durch Oeffnungen.

Bei den Druckversuchen zeigte es sich, dass man die Klappen etwas von Hand senken durfte, ohne dass sich die Oberfläche irgendwie bewegte. Diese auffällige Erscheinung erweckte den Wunsch, die Bewegungen im Innern der

\*) Zu diesen 52 Gramm bemerkt Engesser: „nach Abzug des aus dem Kasten herausgetretenen Sandgewichtes.“

Sandmasse selbst zu verfolgen und zu diesem Zwecke diene die nachstehend geschilderte Methode. Es wurde ein Theil des Rheinsandes in seinem natürlichen Zustande belassen, und eine andere Partie mit Fuchsin roth gefärbt; nun erfolgte die Aufschüttung von Sandkörpern, welche aus abwechselnd rothen und ungefärbten Schichten bestanden, in der Weise, dass auf eine Blechunterlage ein Eisenring gelegt und dieser z. B. mit ungefärbtem Materiale vorsichtig gefüllt und vollgestrichen wurde. Auf diesen ersten Ring kam ein zweiter, welcher dann eine rothe Füllung erhielt, ein dritter mit ungefärbtem Sand u. s. w. Die Blechunterlage selbst trug ein nach unten vorspringendes Mundstück von kreisförmigem Querschnitte, welches zunächst mit einem Stöpsel derart verschlossen war, dass die obere Stöpselfläche bündig mit der Blechoberfläche abschloss. Sollte der Sand in Bewegung kommen, so wurde der Stöpsel etwas gesenkt — nicht etwa ganz herausgezogen — und die trockene Sandmasse deformirte sich. Zur Fixirung der veränderten Schichten musste dann eine Flüssigkeit eingegossen werden, die nach einiger Zeit erstarrt. Nachdem Verschiedenes z. B. Wasserglas, Gummi versucht worden war, fiel die Wahl auf geschmolzenes Paraffin. Auch Wachs wäre anwendbar; erschwert aber etwas das Arbeiten in Folge seines höheren Schmelzpunktes. Nach geschehener Erkaltung, liess sich der festgewordene Sandkörper entzwei schneiden oder sägen und die neuen Schichten lagen in Natur vor. Da der Einguss des Paraffins die Oberfläche manchmal ein wenig verletzte, so wurde zuweilen nach der Stöpselsenkung, aber noch vor dem Eingiessen eine oberste Schutzschicht aufgebracht.

Aehnliche Versuche hat, wie der Verfasser seitdem erfahren, Tresca in den „Annales du conservatoire impérial des arts et métiers,“ 1865 mitgetheilt und dabei constatirt, dass sich feste Körper unter hohem Drucke und auch Sand unter dem Einflusse des eigenen Gewichtes beim Ausflusse ähnlich wie Flüssigkeiten verhalten, dass nämlich die früher horizontalen Schichten sich in langgestreckte, parallele, cylindrische oder kegelförmige Flächen verwandeln; eine nähere Untersuchung der Sandbewegung scheint übrigens nicht in der Absicht Tresca's gelegen zu haben und hätte er wohl zu diesem Behufe einige Präparate mit kleinerer Stöpselsenkung, als er sie anwandte, herstellen müssen, demgemäss wurde auch keine Abbildung der Sandkörper veröffentlicht.\*)

Aus den Fig. 1, 2 u. 3 auf Bl. 34, welche die Erscheinung in natürlicher Grösse wiedergeben, geht hervor, dass sich bei einer Senkung des Stöpsels ein lothrechter Cylinder in Bewegung setzt, der die Mundstücköffnung zur Basis hat. Nach Fig. 4 bleibt die cylindrische Gleitfläche auch dann noch vertical, wenn die Unterlage und das Mundstück geneigt werden, wenn sich also der Propfen selbst nicht mehr in lothrechter Richtung bewegt. Die Grösse der Senkung der einzelnen Schichten nimmt von unten nach oben ab — bei geringer Verschiebung des Stöpsels bleiben die oberen Schichten unverändert (Figuren 2 und 3), indem die

\*) Vergl. auch v. Obermayer, Versuche über den Ausfluss plastischen Thones. Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe der kais. Akademie d. Wissenschaft, LVIII Bd., II. Abth., Jahrg. 1868, S. 737 bis 755, ferner Tresca's Mittheilungen, Comptes-rendus LIX S. 754—758 LX S. 398, LXIV S. 809, LXVI S. 263—270.



niedergehende Sandsäule ihr Volumen entsprechend vermehrt und deren untere Lagen manchmal bei der Deformation ihren Inhalt auf das  $\frac{4}{3}$ fache erhöhen. Wird der Durchmesser der Ringe verkleinert, wird beziehungsweise die Ringumhüllung durch eine Glasröhre ersetzt, und im Uebrigen, so verfahren wie früher, so entstehen Fig. 5 und 6.

Auf etwas abweichende Art, wie obige Figuren, wurde Fig. 7 erhalten, indem bei derselben unter der mit einer Oeffnung versehenen Bodenplatte ein Schieber rasch vorbeigezogen wurde, welcher eine correspondirende Oeffnung besass, so dass Fig. 7 die Fallgeschwindigkeiten wiedergibt. Uebrigens wurde auch ein Versuch in der Weise gemacht, dass die durchlöchernte Bodenplatte auf einer zweiten Unterlage aufsass und nun die erste Platte mit allen darüber befindlichen in die Höhe gehoben wurde, so dass der ausströmende Sand zwischen beiden Platten einen Kegel bildete.

Bei Fig. 8 endlich, wurde der Sand zuerst mit Paraffin übergossen und dann der Stöpsel vollständig herausgezogen; bei Zuguss von viel Paraffin fiel ein cylindrisches Stück aus der unteren sehr durchnässten Sandpartie heraus und das übrige blieb stehen.

Bei viereckiger Oeffnung sind die Erscheinungen ähnlich wie bei kreisförmiger. Die Anwendung langgestreckter Rechtecke würde einen Fall betreffen, der sein Analogon in grossem Massstabe bei Niedergang der Zimmerung von Bergwerksstollen wiederfindet, wobei allerdings der Umstand erwähnt werden muss, dass das Stollengebirge häufig aus nassem Sande oder Erde, aber äusserst selten aus trockenem Sande besteht. Der Versuch wurde (Fig. 9) vorgenommen, indem ein vierkantiger Holzstab abwechselnd mit rothen und ungefärbten Schichten umgeben und überdeckt und sodann herausgezogen wurde. Wieder setzte sich bloss die Masse in Bewegung, welche lothrecht über dem Stollen auflag; es erfolgte ein Firstenbruch, das Hangende kam nieder und die Stösse blieben stehen.

Bei einem ähnlichen Experiment (Fig. 10) wurde der um den vierkantigen Stab geschüttete Sand vor der Deformation mit Paraffin getränkt und dann der Stab herausgezogen, worauf sich der nasse Sand frei trug, so dass ein kleiner Stollen in einer cohärenden, seitlich von festen Wänden begrenzten Masse hergestellt war. Nun wurde mit einem Holzklötz sehr stark auf die Sandoberfläche gedrückt und da zeigte es sich, dass die Firste ziemlich unversehrt blieb, die Stösse hingegen sich horizontal gegen die Stollenmitte zu bewegten und zwar an der Sohle früher als an der Decke, bis der Stollen theilweise mit locker gefügtem Material angefüllt war; im geeigneten Augenblicke wurde mit dem Niederpressen aufgehört und das ganze erkalten und erstarren gelassen.

Es zeigt endlich Fig. 11 den Auslauf aus einem seitlichen Loche, welches durch ein Brettchen verschlossen gewesen war und durch in-die-Höhe-ziehen des Brettchens geöffnet wurde.

## 8. Theoretische Ableitung des Druckes auf eine horizontale Bodenöffnung.

Gelegentlich ihrer Untersuchungen über den Seiten-  
druck der Erde haben Lévy, Rankine, Mohr, Consi-

dère und Winkler über die im Inneren einer Erdmasse wirkenden Kräfte eine Theorie aufgestellt, welche auch hier als Grundlage dienen soll.

Betrachtet man ein im Inneren des Sandkörpers gelegenes prismatisches Element mit der Basisfläche  $ABC$ , so wirken auf dessen Seitenflächen  $dx$ ,  $dy$  und  $ds$  pro Flächeneinheit Druckkräfte  $H$ ,  $V$  und  $N$ , sowie Schubkräfte  $T$ ,  $T_1$  und  $S$ . Der Winkel  $ACB$  sei ein rechter und  $\angle BAC = \alpha$ . Dann gilt so lange noch eben Gleichgewicht in der Sandmasse herrscht

$$T = T_1$$

sonst erfolgt eine Drehung um den Mittelpunkt von  $ds$ . Das Gleichgewicht gegen Verschiebung in der Richtung senkrecht auf  $AB$  und parallel zu  $AB$  erfordert:

$$N ds = (H dy - T dx) \sin \alpha + (V dx - T dy) \cos \alpha = 0$$

$$S ds = (-H dy + T dx) \cos \alpha + (V dx - T dy) \sin \alpha = 0$$

$$\text{oder da } \frac{dy}{ds} = \sin \alpha \text{ und } \frac{dx}{ds} = \cos \alpha \text{ ist,}$$

$$N = \frac{V+H}{2} + \frac{V-H}{2} \cos 2\alpha - T \sin 2\alpha \quad \dots 1)$$

$$S = \frac{V-H}{2} \sin 2\alpha + T \cos 2\alpha \quad \dots 2)$$

woraus sich ergibt:

$$\left(N - \frac{V+H}{2}\right)^2 + S^2 = \frac{(V-H)^2}{4} + T^2 \quad \dots 3)$$

für den Winkel  $\delta$ , den die Resultirende  $R$  von  $S$  und  $N$  mit einer auf  $AB$  errichteten Senkrechten einschliesst, gilt:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{S}{N} = \frac{\frac{V-H}{2} \sin 2\alpha + T \cos 2\alpha}{\frac{V+H}{2} + \frac{V-H}{2} \cos 2\alpha - T \sin 2\alpha} \quad 4)$$

Wird nun der Neigungswinkel der natürlichen Böschung des Sandes mit  $\varphi$  bezeichnet und nimmt man an, dass der Reibungs-Coëfficient von Sand auf Sand im Innern derselbe sei, wie an der Oberfläche, eine Voraussetzung die durchweg üblich, deren Richtigkeit aber allerdings noch nicht erwiesen ist\*), so kann  $\delta$  im Maximum gleich  $\varphi$  werden und sobald  $\delta$  den Werth  $\varphi$  überschreitet, erfolgt eine Rutschung längs der betreffenden Fläche, welche damit zur Gleitfläche wird. Für das Maximum von  $\varphi$  muss

$$\frac{d \operatorname{tg} \delta}{d \alpha} = 0$$

werden, oder da  $N$  nicht unendlich gross werden kann, muss gelten:

$$N dS - S dN = 0 \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{V+H}{2} + \frac{V-H}{2} \cos 2\alpha - T \sin 2\alpha\right) [(V-H) \cos 2\alpha - 2 T \sin 2\alpha] - \left(\frac{V-H}{2} \sin 2\alpha + T \cos 2\alpha\right) [-(V-H) \sin 2\alpha - 2 T \cos 2\alpha] = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{(V+H)(V-H)}{2} \cos 2\alpha + \frac{(V-H)^2}{2} - (V+H) T \sin 2\alpha + 2 T^2 = 0$$

\*) Vgl. Hagen's oben citirten Aufsatz in Pogg. Ann., sowie Löwe, alte und neue Versuche über Reibung und Cohäsion von Erden, München, 1872.

oder

$$\frac{V-H}{2} \cos 2\alpha - T \sin 2\alpha = - \frac{(V-H)^2 + 4T^2}{2(V+H)} \quad 5)$$

Berücksichtigt man neben dieser Gleichung noch die Gleichungen (1) und (3) und bezeichnet man die für die Gleitfläche geltenden Werthe von  $N$  und  $S$  mit  $N_1$  und  $S_1$  so folgt

$$N_1 = \frac{V+H}{2} - \frac{(V-H)^2 + 4T^2}{2(V+H)} \quad \dots \quad 1a)$$

und

$$\left( \frac{(V-H)^2 + 4T^2}{2(V+H)} \right)^2 - S_1 = \frac{(V-H)^2 + 4T^2}{4} \quad \dots \quad 3a)$$

woraus sich ergibt

$$N_1 = \frac{2(VH-T^2)}{V+H} \quad \dots \quad 6)$$

$$S_1 = \pm \frac{\sqrt{[(V-H)^2 + 4T^2](VH-T^2)}}{V+H} \quad \dots \quad 7)$$

wobei der zweite Differentialquotient zeigt, dass in Gleichung (7) das Zeichen  $+$  einem Maximum  $\delta = +\varphi$ , und das Zeichen  $-$  einem Minimum  $\delta = -\varphi$  entspricht.

Es folgt aus (6) und (7)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{S_1}{N_1} = \frac{\sqrt{(V-H)^2 + 4T^2}}{4(VH-T^2)} \quad \dots \quad 8)$$

$$\text{Anm: Es ist } \cos \varphi = \frac{2\sqrt{VH-T^2}}{V+H} \quad \dots \quad 9)$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(V-H)^2 + 4T^2}}{V+H} \quad \dots \quad 10)$$

die Seitenfläche  $BC$  (parallel zur  $y$  Axe) selbst eine Gleitfläche, so wird  $S_1$  identisch mit  $T$  und  $N_1$  mit  $H$ .

Es gilt dann

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T}{H} \quad \dots \quad 11)$$

und aus (6) wird

$$H = \frac{2VH - 2H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{V+H}$$

woraus hervorgeht\*), dass

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{V-H}{2H} \quad \dots \quad 12)$$

ferner

$$H = \frac{V}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad \dots \quad 13)$$

und

$$T = \frac{V \operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad \text{ist} \quad \dots \quad 14)$$

Es soll nun angenommen werden, dass die  $x$ -Axe horizontal und in der ebenfalls horizontalen Sandoberfläche liege; ist dann das spezifische Gewicht des Sandes gleich  $\sigma$ , so ist der Verticaldruck pro horizontale Flächeneinheit bei gleichmässiger Sandunterstützung für einen Punkt mit der Tiefenordinate  $y$

$$V = y \sigma \quad \dots \quad 15)$$

und an einem solchen Punkte würde, wenn der Verticaldruck daselbst ungeändert bleibt, jedoch eine lothrechte

\*) Diese Einsetzung hätte schon früher vorgenommen werden können, wodurch die Rechnung etwas einfacher, aber der Gang der Ableitung undeutlicher geworden wäre.

Gleitung eintritt, längs dieser Gleitfläche pro Flächeneinheit ein verticaler Schub wirken von der Grösse

$$T = \sigma y \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad \dots \quad 16)$$

Geht man nun auf den Fall der Bestimmung des Druckes auf eine bewegliche Bodenklappe ein, so ist durch die Versuche bereits constatirt, dass sich beim Absturze eine verticale cylindrische Gleitfläche bildet, welche den Umfang der Bodenöffnung zur Leitlinie hat. Innerhalb des Cylinders ist nach den Versuchen der Verticaldruck kleiner, als es der Sandhöhe bei gleichmässiger Unterstützung entsprechen würde und ausserhalb des Cylinders muss der Druck entsprechend grösser sein, da ja das Gesamtgewicht des Sandes durch die Gegenreaction der gesammten Unterstützung wieder aufgehoben werden muss. Einer verticalen Gleitfläche innerhalb des Umfanges würde ein  $T$  entsprechen welches kleiner, hingegen ausserhalb des Umfanges ein  $T$ , welches grösser als  $\sigma y \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$  ist. Es ist also wahrscheinlich, dass längs der Gleitfläche ein Schub wirkt von der Grösse (pro Flächeneinheit)

$$T = \sigma y \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

Nunmehr kann nach dem Beispiele Hagen's fortgefahren werden. Hat der Umfang der Bodenklappe die Länge  $u$  und die Sandschüttung die Höhe  $h$ , so wirkt an der Cylinderfläche — falls gleichzeitig längs der ganzen Höhe der Winkel  $\varphi$  erreicht wird — eine Kraft nach aufwärts

$$u \int_0^h T dh = u \int_0^h \sigma y \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi} y dy = \frac{1}{2} \sigma u h^2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

Wird der Inhalt der beweglichen Bodenfläche mit  $F$  bezeichnet, so drückt nach abwärts ein Sandgewicht:

$$F \sigma h$$

Den Absturz bewirkt die Differenz der vertical nach oben und unten wirkenden Kräfte, also die Resultirende

$$\sigma \left( Fh - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \cdot u h^2 \right) \quad \dots \quad 17)$$

Diese Kraft hat für ein bestimmtes  $h$  ihr Maximum; ist die Höhe der Schüttung grösser als dieses  $h$ , so erfolgt eine Trennung des Sandes, — es wird im ersten Augenblicke des Absturzes nur in den unteren Lagen der Winkel  $\varphi$  erreicht — und jenes Maximum ist der Druck, der bei allen grösseren Höhen den Absturz bewirkt. Die Differentiation liefert für das Maximum einfach

$$F - u h \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = 0$$

oder

$$h = \frac{F}{u} \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}$$

und für den Druck

$$K = \sigma \left( \frac{F^2}{u} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{F^2}{2u} \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \right)$$

oder

$$K = \frac{\sigma F^2}{2u} \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \quad \dots \quad 19)$$

Zum Beispiel:

Für einen Kreis mit dem Radius  $r$

$$K = \sigma \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{\pi r^3}{4} \dots \dots \dots 20)$$

Für ein Quadrat mit der Seitenlänge  $s$

$$K = \sigma \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{s^3}{8} \dots \dots \dots 21)$$

Für ein Rechteck mit den Seitenlängen  $s$  und  $s_1$ .

$$K = \sigma \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{s^2 \cdot s_1^2}{4(s + s_1)} \dots \dots \dots 22)$$

Ist  $s_1$  im Vergleich zu  $s$  sehr gross, so ist der Druck pro Längeneinheit des Streifens, mit anderen Worten der Druck pro Längeneinheit auf die Firste eines Stollens von der Breite  $s$

$$\frac{K}{s_1} = \sigma \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{s^2}{4} \dots \dots \dots 23)$$

Bei sehr unregelmässigen Flächen ist die stillschweigende Annahme, dass die Maximaldruckhöhe in allen Theilen des Cylinders gleichzeitig erreicht werde, nicht mehr zulässig und müssten verschiedene Druckhöhen in die Formel (17) eingesetzt werden,

Es kann bemerkt werden, dass sich die Function

$$\frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \cotg \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi = \frac{3 - \cos 2 \varphi}{\sin 2 \varphi}$$

für die thatsächlich vorkommenden Werthe von  $\varphi$  wenig ändert, und ihr Minimum mit 2.828 für  $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{1/2}$  oder  $\varphi = 35^\circ 15' 29''$  hat.

Es lässt sich an diese Ableitung noch eine fernere Erwägung knüpfen, welche wieder vom dreiseitigen Element ausgeht.

Macht man das Verhältniss von  $dy$  zu  $dx$  so gross, dass sich die Verticalcomponenten der auf  $dy$  und  $dx$  wirkenden Kräfte aufheben, also bloss horizontale Componenten übrig bleiben, so ist die Bedingung hiefür:

$$T dy = V dx \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{V}{T} \dots \dots \dots 24)$$

und diese Gleichung bestimmt jene Lage von  $ds$ , bei welcher die auf  $ds$  wirkende Kraft — welche ja den auf  $dx$  und  $dy$  wirkenden das Gleichgewicht hält — horizontal ist. Speciell dort, wo eine verticale Gleitfläche existirt, also Formel (16) gilt, geht Formel (24) über in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \cotg \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi \dots \dots 25)$$

während der kleinste Werth, den  $\frac{dy}{dx}$  haben kann, direct durch den Reibungscoefficienten bestimmt ist, mit

$$\frac{dy}{dx} = \cotg \varphi \dots \dots \dots 26)$$

Bei einer Bodenklappe liesse sich nun, wenn die Lage der Gleitfläche in allen Punkten der Sandmasse bekannt wäre, eine Fläche construiren, welche von dem Umfange der Klappe ausgeht und welche die Eigenschaft besitzt, dass auf ihre Elemente nur Horizontalkräfte wirken. Dann bliebe als Druck nach unten, welchem der Gegendruck der Bodenklappe das Gleichgewicht hält, nichts übrig als das Gewicht jener Sandmasse, welche von der erwähnten Fläche einerseits und der Klappe andererseits eingeschlossen ist.

Bei dem Stollen war der Druck pro Längeneinheit nach (23)

$$\sigma \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{s^2}{4};$$

man erhält denselben Druck, wenn man die Fläche in zwei Ebenen zerlegt, die unter der Neigung

$$\pm \frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \cotg \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi$$

ansteigen. Bei der kreisförmigen Klappe muss die Flächenneigung gegen das Innere zu abnehmen, wenn der Druck der Formel (20) resultiren soll. Es soll noch bemerkt werden, dass je flacher die Gleitfläche geneigt ist, desto kleiner  $\frac{dy}{dx}$  wird, womit auch der Inhalt des drückenden Körpers und der Druck abnimmt.

#### 9. Uebereinstimmung der Formeln mit den gemessenen Werthen.

Der Reibungswinkel  $\varphi$ , das specifische Gewicht  $\sigma$  und der Ausdruck  $\frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}$  hat für die verschiedenen benutzten Sandsorten folgende Werthe:

Tab. 8.

Material	$\varphi$	$\frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}$	$\sigma$
Rheinsand.....	33° 40'	2,833	1,445
Bleischrot.....	26° 0'	3,026	6,91
Goldstreusand.....	42° 50'	2,933	0,86
Hagen's Streusand.....	25° 8'	3,070	2,713
Engesser's Streusand.....	oder		
	32° 30'	2,814	2,713
	36° 30'	2,778	1,5

Wird nunmehr nach Formel (20) der Druck auf eine kreisförmige Bodenklappe von 1<sup>cm</sup> Durchmesser berechnet und mit den gemessenen oben bereits angegebenen Werthen verglichen, so verhalten sich die Zahlen wie folgt:

Tab. 9.

Material	Berechneter Druck in Gramm	Gemessener Druck in Gramm
Rheinsand.....	0,402	0,396
Bleischrot.....	2,053	1,878
Goldstreusand.....	0,248	0,234
Hagen's Streusand.....	0,818 beziehw. 0,757	0,664 bis 0,750
Engesser's Streusand.....	0,409	Minimaldruck 0,272

Für die Rechtecke, für welche die Versuche mit Rheinsand vorliegen, lässt sich folgende Tabelle aufstellen:

Tab. 10.

$s$ cm	$s_1$ cm.	Berechneter Druck Gramm	Beobachteter Druck Gramm
10	10	512	512
1,97	5,8	17,42	15,59
2,10	4,11	12,28	12,32
2,02	2,04	4,28	4,51

Engesser's Minimaldruck verhält sich in nachstehender Weise zu den berechneten Werthen, wenn mit Benutzung der Messungen Hagen's die Reibung längs der

Glasseiten  $s_1$  zu 0.35 des entsprechenden Widerstandes bei Verschiebung von Sand gegen Sand gesetzt wird, also eine Formel

$$K = \sigma \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{s^2 s_1^2}{4(s + 0.35 s_1)} \dots 22^a)$$

in Anwendung kommt.

Tab. 11.

$s$ cm.	$s_1$ cm.	Berechneter Druck Gramm	Beobachteter Minimaldruck Gramm
20	4	328	150 bei 15–40 cm. Höhe
20	2,2	97	180 „ 6 cm. Höhe
			52 „ 40 „ „

Wie weit Engesser's mittlerer Druck sich der Formel 22) anschliesst, lässt sich aus dem oben citirten Aufsatze nicht entnehmen.

Der Druck auf den First eines Stollens von 3.0 bis 3.40 m Breite würde bei Rheinsand nach (23) per Centimeter-Länge  $1.445 \times 2.833 \times \frac{300^2 \text{ bis } 340^2}{4} = 92000 \text{ bis } 118000^*$  oder

per Meter Länge 9.2 bis 11.8 Tonnen betragen. Gröger\*) schätzt denselben bei festgelagerten Sand und Schotter nach Erfahrungen in einem durch Lehm, Tegel, Sand und Schotter getriebenen Stollen, dessen Zimmerung eine bewegliche Klappe von etwa 3 bis 3.4 m Breite darstellte, auf 3 Tonnen per  $\square^m$  also auf 9 bis 10.2 Tonnen per laufenden Meter, was ziemlich mit dem Resultate der Versuche zusammentrifft; es braucht wohl nicht hinzu gesetzt zu werden, dass hiemit eine unmittelbare Uebertragung der bei trockenen Sand gefundenen Gesetze auf nasses Gebirge nicht versucht sein soll\*).

#### 10. Druck auf eine geneigte Oeffnung.

Die Versuche fanden nur für Neigungen unter 30° statt und so soll auch die nachfolgende Entwicklung bis zu Neigungen gelten, welche kleiner sind, als die der natürlichen Böschung. Bei der Beobachtung der Bewegung, im Innern des Sandes hatte es sich gezeigt, dass wieder — wie bei einer horizontalen Oeffnung — ein verticaler Cylinder abgeleitet und bei freiem Ausströmen-Lassen bildete sich ein Sandstrahl, der nur wenig von einer Lothrechten abwich; es ist daher anzunehmen, dass auch der wirkende Druck nahezu vertical ist und das zu seiner Berechnung die schon abgeleiteten Formeln dienen können.

Es sei beispielsweise die Bodenklappe kreisförmig und unter einem  $\alpha$  gegen die Horizontale geneigt; dann ist in der Formel 19

$$K_a = \sigma \frac{F^2}{2u} \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}$$

einzusetzen

$$F = r^2 \pi \cos \alpha$$

sowie näherungsweise

$$u = r \pi (1 + \cos \alpha)$$

\*) Die Statik der Tunnelgewölbe in druckreichem Gebirge auf Grundlage von Wahrnehmungen bei der Bauausführung, von Jaroslav Gröger, Ingenieur, Prag 1881.

\*) Vergl. bez. Druck auf Tunnelgewölbe, ferner: Wilhelm Ritter, Die Statik der Tunnelgewölbe, Berlin, 1879; Weissbach-Herrmann, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, 5. Aufl. II. Thl., I. Abth. S. 158–162. Culmann; Graphische Statik; Könyves-Tóth, über Tunnelbau etc. Wien, 1875; Scheffler und von Ott.

und es findet sich die verticale Druck-Componente

$$K_a = \frac{\sigma r^3 \pi}{2} \cdot \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

während für  $\alpha = 0$

$$K_0 = \frac{\sigma r^3 \pi}{4} \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} \dots 19)$$

gewesen war. Es ist dann

$$K_a = K_0 \frac{2 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = K_0 (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2})$$

Da  $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$  für geringere Werthe von  $\alpha$  sehr klein ist,

weicht  $K_a$  von  $K_0$  nur wenig ab. So findet sich für

$$\alpha = 10^\circ ; \quad 20^\circ ; \quad 30^\circ$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 0.008 ; \quad 0.031 ; \quad 0.072$$

und demnach bei Rheinsand als Verticaldruck auf eine Oeffnung von 1 cm Durchmesser bei wechselnder Neigung derselben

$$K_0 = 0.402 ; K_{100} = 0.399 ; K_{200} = 0.390 ; K_{300} = 0.373$$

Zu dieser Vertikalkraft tritt eine Horizontalkraft  $H_a$  hinzu, welche sich ungefähr angeben lässt, da das Verhältniss der pro wagrechte und lothrechte Flächeneinheit wirkenden Druckkräfte mit  $\frac{H}{V} = \frac{1}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}$  bekannt ist und die Kräfte  $H$  senkrecht auf den Cylindermantel gerichtet sind. Solche Schätzungen, deren nähere Durchführung hier unterbleiben soll, da sie keinen theoretischen Wert und eine sehr geringe Genauigkeit besitzen und blos darthun, dass  $H_a$  sehr klein ist, liefern z. B. für  $\alpha = 30^\circ$  bei Rheinsand  $H_a = 0.05 K_a$ .

Gemessen wurde in der Weise, dass der Wagebalken eine schräge Lage erhielt, (siehe nebenstehende Figur) und die Wagenbelastung die Function  $K_a + H_a \operatorname{tg} \alpha$  angab, welche nach dem Vorhergehenden, so wenig von dem Druck  $K$  auf eine Horizontalfläche differirt, dass sie bei der Ungenauigkeit aller Sanddruckversuche wesentlich constant erscheint.

Tabelle für  $K_a + H_a \operatorname{tg} \alpha$   
Rheinsand  $K_0 = 0.402 d^3$  (berechnet) und  $= 0.396 d^3$  (gemessen).

Tab. 12.

Durchmesser der Oeffnung cm.	Neigung	Zahl der Versuche	Mittelwerth von $K_a + H_a \operatorname{tg} \alpha$ Gramm	Entsprechender Werth von $K_a + H_a \operatorname{tg} \alpha$ für eine Oeffnung von 1 cm. Durchmesser Gramm
15	10°	20	1259	0,373
"	30°	20	1237	0,367
20	10°	20	2983	0,373
"	20°	20	3072	0,384
"	30°	20	3353	0,419*
2,66	8°	20	7,25	0,385
"	16° 10'	20	7,44	0,395
"	16° 40'	20	7,43	0,395
"	30°	20	7,40	0,393

\*) Bei diesem Versuche mochte die Dicke der Holzwand störend eingewirkt und einen Theil des Horizontaldruckes, also des entsprechenden Reibungswiderstandes aufgehoben haben.

# 11. Einfluss eines aufgesetzten oder versenkten Gewichtes.

Bei diesen Versuchen wurde ein gewöhnliches eisernes Gewicht von 5<sup>kg</sup>, welches eine Basis von 95<sup>mm</sup> Durchmesser (siehe Fig.) besass, entweder auf die Sandoberfläche gesetzt oder aufgestellt, ehe die Schüttung vollendet war und auf diese Weise in das Innere der Sandmasse gebracht. Die Bodenöffnung war hierbei immer horizontal und kreisförmig die Höhe der Füllung betrug 51<sup>cm</sup> und als Material diente Rheinsand, bei welchem nach der Theorie der Druck bei 15<sup>cm</sup> Durchmesser 1.36<sup>kg</sup> und bei 20<sup>cm</sup> Durchmesser 3.22<sup>kg</sup> beträgt.



Tab. 13.

Zahl der Versuche	Entfernung der Gewichtsunter- kante von dem Boden cm.	Entfernung der Gewichtsmitte von der Oeffnungsachse cm.	Beobachteter Druck  Kilogramm	Anmerkung
Oeffnungsdurchmesser 15 cm.				
16	50	0,0	1,33	Das Ge- wicht senkte sich beim Absturz
11	25 bis 35	0,0	1,32	
4	20 bis 35	0,0	1,40	
1	13	0,0	1,60	
1	4 bis 5	0,0	2,16	
12	50	10,0	1,47	Das Gewicht blieb zu- nächst ste- hen.
12	50	15,0	1,48	
12	50	20,0	1,47	
12	50	25,0	1,37	
12	50	30,0	1,34	
12	50	35,0	1,32	
Oeffnungsdurchmesser 20 cm.				
12	50	0,0	3,15	
12	50	10,0	3,37	
10	50	20,0	3,25	
8	50	30,0	3,37	

Hiernach würde eine centrale Belastung den Druck nicht vergrössern, wenn die Entfernung der Gewichtsunterkante vom Boden etwa  $\frac{5}{3}$ mal so gross ist, als der Durchmesser der Oeffnung oder noch grösser, während eine etwas excentrische Belastung den Bodendruck zu erhöhen schien.

## 12. Druck gestampften Sandes.

Sand hat im losen und gestampften Zustande ein verschiedenes specifisches Gewicht der Schüttung. Obwohl nun ein Stampfen und ebenso ein blosses Schütteln das specifische Gewicht erhöhte, nahm dabei der Bodendruck des Rheinsandes ab, welche Abnahme durch die Bildung einer Gleitfläche erklärt wird, die nicht mehr cylindrisch ist, sondern nach oben conisch zusammenläuft\*) (siehe Fig. 12). Die Druckmessungen zeigten bei Rheinsand, der durch Schütteln comprimirt wurde, folgende Abnahme:

Tab. 14.

	Anzahl der Versuche	Oeffnungsdurchmesser cm.	Mittlerer Druck Gramm	Anmerkung
Comprimirt	10	2,12	3,07	(siehe oben) Tab 1.
Lose	20	2,12	3,92	

\*) Vergl. die Schlussbemerkung der theoretischen Ableitung §. 8.

Goldstreusand zeigte noch bedeutendere Druckvermindierungen, da dieselben aber mit Cohäsionserscheinungen verbunden waren — es blieb eine verticale Böschung von ziemlicher Höhe stehen — können die gefundenen Zahlen hier keine Verwendung finden.

## 13. Bodendruck bei Füllung einer Röhre mit Sand.

Die Beobachtung wurde mit einer schmiedeisernen, rauhen Gasröhre von 2<sup>cm</sup> Durchmesser durchgeführt, welche mit Rheinsand gefüllt wurde. Auch hier fand sich der Bodendruck constant und zwar als Mittel aus 19 Versuchen zu 2,83<sup>gr</sup>, was einem Druck von 0,354<sup>gr</sup> bei 1<sup>cm</sup> Durchmesser entsprechen würde, während bei Reibung von Sand gegen Sand 0,396<sup>gr</sup> (siehe oben) gefunden worden war.

## 14. Deformation der Sandschichten bei diversen Cylinder-Bewegungen.

Anhangsweise sollen noch Abbildungen von Sandschichten-Deformationen gegeben werden, bei welchen es sich zwar noch um Cylinderverrückungen, aber nicht mehr um den Absturz aus einer Bodenöffnung handelt. Es wird dargestellt in Fig 13 und 14 das Einrammen eines Pfahles (Eisenstäbchen, bezw. Weissblechstöpsel) in trockenen Sand und in Fig. 15 das Finrammen eines Pfahles in mit Paraffin bereits übergossenen, also nassen Sand. In Fig. 16 das Herausziehen eines Pfahles, in Fig. 17 die Schichtenumlagerung bei Hinaufstossen eines Stöpsels von unten nach oben, wobei die Eisenringumhüllung vielleicht etwas störend wirkte.

## II. Bestimmung der Gleitfläche bei Sandmassen mit beweglicher, nachgebender seitlicher Unterstützung.

### 1. Geschichtliche Einleitung.

Die Bestimmung des Druckes, welchen Erde auf eine Stützmauer ausübt, gehört zu den älteren Themen des Ingenieurwesens\*). Sie wurde zur Zeit schon von Bullet, Couplet, Belidor, Sallonyer, Tersac de Montlong und Blaveau versucht. Die erste wissenschaftlich besser begründete Rechnungsmethode stammt von Coulomb (1774). Dieselbe beruht auf der Voraussetzung, dass sich bei dem Einsturz einer Stützmauer ein prismatischer Keil längs einer durch den erdseitigen Fuss der Stützmauer gehenden Gleitfläche abtrenne, und zielt dahin, jene Gleitfläche anzugeben, bei welcher die Stützmauer den grössten Druck auszuhalten hat. Auf derselben Grundlage, d. h. unter der Annahme von Maximaldruckprismen, arbeiteten weiter Prony, Mayniel, Français, Navier, Audoy, Poncelet, Hagen, Scheffler, Saint-Guilhem, Culmann, Curioni, Curie, Rebhaun, Holzhey, von Ott, Wilhelm Ritter, Crugnola und Andere mehr.

Von der Betrachtung des kleinsten Elementes, wie Cauchy sie in die Festigkeitslehre eingeführt hat, und

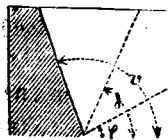
\*) Viele der folgenden Daten sind entnommen aus: Crugnola „Spinta delle terre e delle masse liquide“, Torino 1880. Winkler „Neue Theorie des Erddruckes nebst einer Geschichte der Theorie des Erddruckes und der hierüber angestellten Versuche“. Wien 1872. Baker „The Actual Lateral Pressure of Earthwork“. Minutes of Proceedings of the Inst. of Civ. Engineers. Vol LXV.

ähnlichen Gesichtspunkten gingen zuerst unabhängig von einander aus: Winkler, Rankine, Lévy, Considère und Mohr, denen sich Ceradini und Weyrauch angeschlossen. Auch bei den neueren Theorien ist die Lage und Gestalt der Gleitfläche für die Grösse des Druckes maassgebend.

Es konnte nicht ausbleiben, dass Verifikationen der so zahlreichen Hypothesen mit Hilfe von Erddruck-Messungen versucht wurden, doch blieben die bezüglichen Bestrebungen von Gadroy, Papacino d'Antoni, Gauthey, Woltmann, Mayniel, Martony de Kőszegh, Hope, Audé, Hagen, Winkler, Curie und Baker ohne entscheidenden Erfolg, namentlich, wie es scheint, weil der Druck in hohem Maasse von Factoren abhängt, die theoretisch erst in zweiter Linie berücksichtigt werden können. Versuche mit wirklichen Probemauern machten Rondelet\*) Bland\*\*), ferner nach Baker: Hope, Pasley, Cunningham, Burgoyne, Michon, Constable und Baker selbst; schliesslich theilt Ardant ein bezügliches Experiment mit im Mémorial du genie, 1848, Nr. 15. Zu einem Aufschluss über die eigentlichen Vorgänge bei dem Einsturz von Stützmauern könnte nun das directe Beobachten der Gleitfläche beitragen, welches sich in ähnlicher Weise durchführen lässt, wie die oben beschriebene Ermittlung der Bewegungen beim Absturz durch eine Oeffnung.

Was die Ansichten der verschiedenen Autoren über die Gleitfläche betrifft, so wurde die Fläche, theils der Einfachheit halber, theils in der Meinung, dass es wirklich der Fall sei, in allen Formeln als eben angenommen. Insbesondere nach Lévy, Mohr, Considère und Weyrauch ist in den Fällen, wo eine streng richtige Berechnung des Druckes möglich ist — bei Lévy gilt das allerdings nur für einzelne Mauerlagen — die Gleitfläche eine Ebene; auch Hagen hält die Gleitfläche für eben. Persy weist nach, dass die Gleitfläche bei horizontaler Oberfläche nur dann eine Ebene sei, wenn die Wand absolut glatt ist und die Erde keine Cohäsion besitzt, und Winkler, dem Crugnola beistimmt, hält bis auf gewisse Fälle — wenn der Druck der unbegrenzten Masse unter dem Complement des Reibungswinkel zwischen Stein und Erde gegen die Mauer wirkt — die Fläche für gekrümmt, rechnet der Einfachheit wegen aber auch unter der Annahme einer ebenen Trennungsfläche.

Die Winkel, welche nach den verschiedenen Theorien die Gleitebene mit der Horizontalen einschliesst, sind in der



nachstehenden Tabelle (auf S. 121) zusammengestellt worden, und wurde hierbei der Uebersicht wegen eine einheitliche Nomenclatur eingeführt.

Es bedeutet (siehe beistehende Figur)

$\varphi$  den Neigungswinkel der natürlichen Böschung gegen die Horizontale,

$\varphi'$  den Reibungswinkel zwischen Sand und Wand,

$\gamma$  den Neigungswinkel der Gleitfläche gegen die Horizontale,

\*) Rondelet: *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*. Tome 3me.

\*\*) Bland: *Experimental Essays on the Principles of Construction of Arches, Piers, Buttresses etc.* London 1839.

$\nu$  den Neigungswinkel der an den Sand grenzenden Wandfläche gegen die Horizontale, so dass bei hinterschnittenen Mauern  $\nu < 90^\circ$ , bei Mauern mit vorliegender Rückwand  $\nu > 90^\circ$  ist.

Scheffler's Formel lässt sich, indem man die Tangenten durch Sinus und Cosinus ausdrückt, transformiren in

$$\operatorname{ctg} \gamma = \left\{ \pm \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi' + \nu - 90)}{\cos^2(\varphi + \varphi' + \nu - 90) \cos(\nu - 90) \sin \varphi}} - \operatorname{tg}(\varphi + \varphi' + \nu - 90) \right\} \dots \dots 27$$

welcher Ausdruck für  $\varphi' = 0$  (Theorie Français) in

$$\operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \frac{\nu + \varphi}{2}$$

und für  $\varphi' = \varphi$  in

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \gamma &= \left\{ \pm \sqrt{\frac{2 \cos \varphi \cos(\varphi + \nu - 90)}{\cos^2(2\varphi + \nu - 90) \cos(\nu - 90)}} - \operatorname{tg}(2\varphi + \nu - 90) \right\} \\ &= \left\{ \pm \sqrt{\frac{\cos(2\varphi + \nu - 90) + \cos(\nu - 90)}{\cos^2(2\varphi + \nu - 90) \cos(\nu - 90)}} - \operatorname{tg}(2\varphi + \nu - 90) \right\} \dots \dots 28 \end{aligned}$$

übergeht und für  $\varphi' + \nu > 180^\circ$  imaginär wird.

Die Gleichungen 27 und 28 stimmen mit den Formeln 299 und 315 in Rebhann's: „Theorie des Erddruckes und der Futtermauern“, Wien, 1871, überein, nur setzt v. Rebhann wie Scheffler blos das + Zeichen.

Eine andere Gleichung entsprechend 28) findet sich in den „Vorträgen über Baumechanik von Carl v. Ott“, nämlich

$$\operatorname{cotg}(\nu - \gamma) = \operatorname{ctg}(\gamma - \varphi) + \sqrt{[\operatorname{ctg}(\nu - \varphi) + \operatorname{ctg} 2\varphi][\operatorname{ctg}(\nu - \varphi) - \operatorname{ctg} \nu]}$$

und hier ist das + Zeichen für alle Winkel richtig.

Endlich leitet Holzhey (Vorträge über Baumechanik, Wien, 1879, S. 1030) Scheffler's Gleichung in folgender Form ab:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin \varphi \sqrt{\sin \nu \sin(\varphi + \varphi')} + \sin \nu \sqrt{\sin \varphi \sin(\nu + \varphi')}}{\cos \varphi \sqrt{\sin \nu \sin(\varphi + \varphi')} + \cos \nu \sqrt{\sin \varphi \sin(\nu + \varphi')}}}$$

welcher Ausdruck für eine verticale Wand, also für  $\nu = 90^\circ$  in

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi \left[ 1 + \sqrt{\frac{\cos \varphi'}{\sin \varphi \sin(\varphi + \varphi')}} \right]$$


übergeht.

Besonders zu erwähnen ist die Ansicht de Lafont's, dass die Vorgänge im Innern des Sandes, je nach der Art des Mauereinsturzes deswegen verschieden seien, weil die Reibung an der inneren Mauerfläche von der Bewegungsrichtung der Mauer abhängt. Kann sich die Mauer blos um eine bestimmte Achse A drehen, so sei der Reibungswiderstand, den eine Kraft Q hervorruft, in deren Richtung sich ein Erdtheilchen E beim Einsturze bewegt, gleich  $Q \cdot \operatorname{tg} \varphi' \cdot \cos \alpha$  zu setzen, wobei  $\operatorname{tg} \varphi'$  den Reibungs-Coëfficienten zwischen Mauer und Erde und  $\alpha$  den Winkel zwischen der Kraft-richtung und einer Normalen auf die Bewegungslinie des betreffenden Standpunktes bedeutet, und wie es scheint, die Richtung des Reibungswiderstandes mit der Wandrichtung

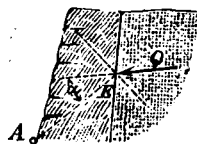


Tabelle für den Neigungswinkel der Gleitfläche bei cohäsionslosem Material und horizontaler Oberfläche.

Tab. 15.

Autor	Verticale Wand $\gamma$	Geneigte Wand $\gamma$
Coulomb	$\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$	 $\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$
Prony	$\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$	
Andoy Français Navier	$\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$	
Hagen	$\arctg \left[ \sqrt[3]{\ctg \frac{\varphi}{2}} - \sqrt[3]{\tg \frac{\varphi}{2}} \right]$ z. B. für $\varphi = 34^\circ$ , $\gamma = 50^\circ 58'$	
Poncelet Saint-Guilhem Scheffler v. Rebhann Culmann	$\ctg \gamma = \left\{ \pm \sqrt{\tg(\varphi + \varphi') [\tg(\varphi + \varphi') + \ctg \varphi]} - \tg(\varphi + \varphi') \right\}$  wobei das Zeichen $+$ gilt für $\varphi + \varphi' < 90^\circ$ und das Zeichen $-$ für den kaum vorkommenden Fall, dass $\varphi + \varphi' > 90^\circ$ ist.  Die Formeln stammen von Scheffler; doch setzte Scheffler wohl aus Versehen nur das $+$ Zeichen. Sämmtliche Autoren geben sehr einfache graphische Methoden, die obigen Formeln entsprechen.  für $\varphi' > \varphi$ ist statt $\varphi'$ in obigen Formeln $\varphi$ zu setzen.	$\ctg \gamma = \left\{ \pm \sqrt{\tg(\varphi + \varphi' + \nu - 90^\circ) - \tg(\nu - 90^\circ)} \cdot \frac{\varphi + 90^\circ}{2} \right\}$  wobei das Zeichen $+$ für $\varphi + \varphi' + \nu < 180^\circ$ und das Zeichen $-$ für $\varphi + \varphi' + \nu > 180^\circ$ gilt.
Winklers prakt. Regel		
Holzhey v. Ott Wilhelm Ritter Crugnola's Regel		
Levy, Winklers Theorie, Considère's Theorie, Boussinesq	$\gamma$ unbekannt und zwar entsteht nach Winkler, Considère eine gekrümmte Gleitfläche, nach Boussinesq ist der untere Theil krumm, der obere unter $\frac{90^\circ + \varphi}{2}$ geneigt	Es ist noch zu bemerken, dass für $\nu > 180^\circ - \frac{\varphi + 90^\circ}{2}$ und $\varphi \geq \varphi'$ Scheffler $\gamma = \frac{\varphi + 90^\circ}{2}$ setzt; ob eine zweite Gleitfläche $\gamma = 180^\circ - \frac{\varphi + 90^\circ}{2}$ hierbei entsteht, wird nicht ausdrücklich gesagt. Bestimmt nimmt dieses Winkler an. In den anderen Theorien wird keine doppelte Gleitfläche erwähnt.
Mohr, Rankine Considère's Rechnungsregel, Weyrauch*)	$\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$	für $\nu = 180^\circ - \frac{90^\circ + \varphi}{2}$ und $\varphi' \geq \varphi$ sei $\gamma = \frac{90^\circ + \varphi}{2}$  für $\nu = 90^\circ$ bis $180^\circ$ bei nicht zu glatter Wand sei $\gamma = \frac{\varphi + 90^\circ}{2}$

zusammenfallen soll, mit anderen Worten: nur die zur Bewegungsrichtung senkrechte Componente einer Kraft verursache eine Reibung. De Lafont setzt bei verticaler Mauer  $Q$  horizontal und in Folge dessen bei horizontaler Mauerverschiebung  $\alpha = 0$ , wobei immerhin bemerkt werden muss, dass sich in Wirklichkeit ein an der Wand befindliches Sandtheilchen beim Absturz ziemlich parallel der Gleitfläche und nicht wagrecht bewegt.



\*) Auf Grund einer unrichtigen Rechnung findet Kreuter, Professor an der Staatsgewerbeschule zu Brünn,  $\gamma = \frac{\varphi + \nu}{2}$  (vergleiche Zeitschrift für Baukunde, I. Bd., S. 181, ferner Wochenschrift III. S. 8.)

## 2. Beschreibung der Versuche.

Die Methode glich insofern jener bei Beobachtung der Abstürzerscheinungen durch Bodenöffnungen, als wieder weisser und gefärbter Sand in abwechselnden Lagen aufgetragen wurde, und die Fixirung der Schichten nach erfolgter Deformation durch Einguss von geschmolzenem Paraffin erfolgte. Zunächst traten hölzerne offene Rahmen aus 3 rechtwinklig aneinander stossenden Stäbchen an die Stelle der früher benutzten Ringe und als Stützmauern fungierten Holzkeile, Glasplatten und dergleichen, die von Hand weggezogen wurden, wobei, wo es nothwendig war,

wieder andere Keile als Führung dienten. Sollte mit Sicherheit der Reibungswinkel  $\varphi'$ , zwischen Sand und Wand, so gross werden wie  $\varphi$ , so wurde die betreffende Wand mit Sand beklebt. Bei manchen Versuchen wurde das Holzklötzchen nicht auf einmal weggezogen, weil die hierbei entstehende Böschung der Sandoberfläche die Bildung immer flacher werdender Gleitflächen verursacht hätte und diese neuen Gleitflächen die ursprüngliche hätten schneiden und entstellen können, es wurde vielmehr der Klotz immer nur wenig verrückt, und jedesmal zwischen den einzelnen Verschiebungen frischer Sand nachgefüllt. Nachdem sich die Tauglichkeit der Methode überhaupt gezeigt hatte, wurde es versucht, durch Anwendung eines Metallapparates die Genauigkeit des Resultates zu erhöhen und das Experimentiren zu erleichtern. Das Blechstück, welches hier die Stützmauer vorstellte und stets mit Sand beklebt wurde, konnte mittelst eines Charnieres in eine beliebige Neigung gebracht werden und liess sich mittelst einer Schraube normal zu sich selbst verschieben, während ein Gradbogen und ein Maassstab das Ablesen der Neigungswinkel und der Verschiebung gestatteten; ferner wurden hier Messingrahmen statt der Holzrahmen verwendet. Uebrigens wurden auch einige Versuche mit Holzrahmen und einer um ihren Fuss in einem Charnier drehbaren Wand namentlich zur Constatirung der Gleitebene bei rückliegender Wand ( $\nu < 90^\circ$ ) gemacht, indem bei vorliegender Wand ( $\nu > 90^\circ$ ) eine Drehung zu undeutliche Resultate — die Schichten brachen nicht genug scharf ab — liefert.

Bei allen Experimenten wurde der oben beschriebene Rheinsand verwendet und war die Sandoberfläche horizontal. Es bildete sich stets eine ebene Gleitfläche.

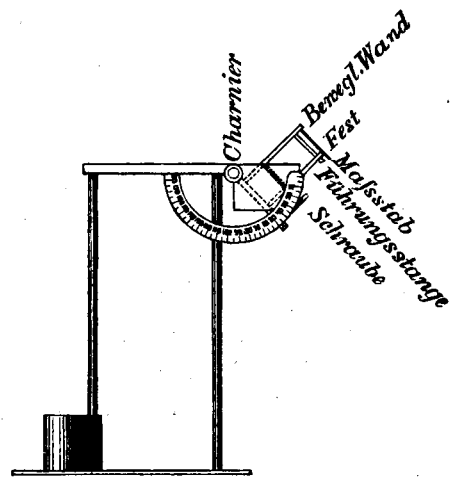
3. Verticale Wand, horizontale Oberfläche.

Es bedeute  $\alpha$  den Winkel, den die Verschiebungsrichtung mit der Horizontalen einschliesst, sei also positiv

Tab. 16.

Nummer	$\alpha$	$\gamma$	Wandbeschaffenheit
1	0°	60°	Holzrand
2	0°	60°	desgl.
3	0°	59°	desgl.
4	0°	60°	Glasplatte
5	+ 50°	59°	Holzrand
6	+ 50°	62°	desgl.
7	- 1°	58°	Messing m. Sand beklebt
8	um den Fuss gekippt	62°	Eisen m. Sand beklebt
Im Mittel		60°	

(Vgl. Fig. 18).



bei Verschieben nach oben und negativ bei Senkung der Mauer und die übrigen Bezeichnungen seien dieselben wie vorher. Da  $\varphi = 33^\circ 40'$  war, ist  $\frac{\varphi + 90^\circ}{2} = 61^\circ 50'$

(Tabelle 16.)

Hiernach lässt sich der Satz aussprechen:

Bei lothrechter Stützwand und wagrechter Sandoberfläche hat eine horizontale oder aufwärts gerichtete Verschiebung der Stützwand oder ein Kippen um ihren Fuss die Bildung einer Gleitfläche zur Folge, deren Neigungswinkel  $\gamma$  gleich oder etwas kleiner als  $\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$

ist. Der Rauigkeitsgrad der Wand ist hierbei ohne Einfluss. Da möglicherweise ein Wegziehen der Mauer andere Erscheinungen bewirken könnte, als ein Nachgeben der Wand in Folge des Sanddruckes selbst, wurde ein Versuch (Nr. 9) in der Weise vorgenommen, dass zwischen das bewegliche Blech des Metallapparates und den Sand ein loses Stück Pappe eingeschaltet wurde, welches bei dem Zurückschrauben des Bleches in Folge des Sanddruckes umkippte. Es fand sich hierbei  $\gamma = 59^\circ$ , also anscheinend eben so gross wie bei den Experimenten 1 bis 8. Um festzustellen, wie weit eine Begrenzung der Sandmasse die Erscheinungen beeinflussen könne, wurde die Gleitfläche bei schmalem Sandkörper untersucht:

Tab. 17.

Nummer	Breite des Sandkörpers mm.	Höhe der Wand mm.	$\gamma$
10	20	28	60°
11	20	40	58°
12	20	40	58°
13	10	40	61°
14	10	50	62°

Ferner wurde zum gleichen Zwecke ein vom Mauerfuss schräg ansteigender Boden eingelegt; das Resultat war:

Tab. 18.

Nummer	Steigung des Bodens	$\nu$	Figur
15	50°	62°	19
16	70°	der Sand rutscht auf dem Boden selbst herunter	20

Die geschilderten Begrenzungen hatten demnach an den Vorgängen nichts geändert. Anders verhielt es sich bei Verschiebung nach abwärts; je steiler dieselbe erfolgte, desto mehr richtete sich die Gleitfläche auf und zwar weicht

Tab. 19.

Nummer	$\alpha$	$\gamma$
17	20	62°
18	20	62°
19	20	59°
20	50	70°

für kleine  $\alpha$  der Winkel  $\gamma$  nur wenig von  $\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  ab, nimmt dann rascher zu bis für  $\alpha = -90^\circ$  die Gleitfläche an der Wand selbst liegt. (Tabelle 19.)

#### 4. Vorgeneigte Wand. Horizontale Oberfläche Horizontale Verschiebung.

Auch bei diesen Versuchen zeigte sich  $\gamma$  bei genügend rauher Wand unabhängig von ihrer Neigung gleich  $\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$

und war die Wand flacher als  $\frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  geneigt, so bildete sich ein Doppelkeil, dessen beide Begrenzungen mit der Horizontalen die Winkel  $\gamma = \frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  und  $\gamma_1 = 180 - \frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  einschlossen.

Tab. 20.

Nummer	$\nu$	$\gamma$	$\gamma_1$	Wandbeschaffenheit
21	110°	62	—	Holz mit Sand beklebt
22, 23	138°	70	?	
24	160°	62	62	Holz ziemlich glatt
25	180°	62	62	Holz
26	180°	?	62	Glasplatte

(Vgl. Fig. 21 und 22)

#### 5. Vorgeneigte Wand. Horizontale Oberfläche. Verschiebung normal zur Wandrichtung.

Zuerst wurde mit Holzprismen experimentirt.

Tab. 21.

Nummer	$180^\circ - \nu$	$\alpha$	Mittelwerth $\gamma$	Mittelwerth $\gamma_1$
27—28	75	— 15°	61° 30'	—
29—33	70	— 20°	66° 12'	—
34—35	60	— 30°	68° 30'	war nicht mit Sicherheit zu messen.
36—39	50	— 40°	69° 20'	
40—43	39	— 51°	71° 20'	
44	30	— 60°	78°	
45	20	— 70°	80 bis 85°	
46—47	0	— 90°	ca. 90°	

(Vgl. Fig. 23)

Da die Einzelwerthe von  $\gamma$  bei Anwendung von Holzprismen stark schwankten, wurde, um eine grössere Genauigkeit zu erzielen, der oben beschriebene Apparat construirt und mit demselben ergab sich das nachfolgende Resultat:

Tab. 22.

Nummer	$180^\circ - \nu$	$\alpha$	$\gamma$	Wandbeschaffenheit
7	89	— 1	58°	Messing mit Sand beklebt
48	80	— 10	58°	
49	70	— 20	62°	
50	60	— 30	64°	
51	50	— 40	64°	
52—53	40	— 50	66°	
54	30	— 60	66°	
55	20	— 70	72°	
56	10	— 80	ca. 76°	
57	0	— 90	ca. 90°	

(Vgl. Fig. 24 und 25).\*)

\*) In Fig. 25 und 26 auf Bl. 34 sind die Pfeile, welche die Bewegungsrichtung der Wand andeuten, irrtümlich verkehrt gezeichnet.

Auch diese Versuchsreihe, welche in ihren Werthen für  $\gamma$  durchweg hinter der vorhergehenden zurückbleibt, zeigt keine sehr stetige Zunahme, gibt aber immerhin, ebenso wie die vorige Tabelle zu erkennen, dass  $\gamma$  mit  $\alpha$  wächst und zwar Anfangs langsam, später rascher, so dass sich etwa die empirische Regel aufstellen liesse

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \frac{\varphi + 90^\circ}{2} + \operatorname{tg} \alpha$$

Bei Umkippen der Wand um ein in ihrem Fuss angebrachtes Charnier ergab sich:

Tab. 23.

Nummer	$180^\circ - \nu$	$\gamma$	Wandbeschaffenheit	Anmerkung
8	90°	62°	Eisen mit Sand beklebt	Die Winkel $\gamma$ waren schlechter messbar als bei Verschiebung
56	62°	63°		
57	60°	ca. 66°		
58	57°	65°		
59	20°	77°		

Das Umkippen um ein Charnier scheint also einer zur Wand normalen Verschiebung vollständig zu entsprechen.

#### 6. Zurückgeneigte Wand. Horizontale Oberfläche. Verschiebung horizontal oder aufwärts.

Hier zeigte sich deutlich das Gesetz  $\gamma = \frac{\varphi + \nu}{2}$ , demzufolge die Gleitfläche den Winkel zwischen der Wand und einer durch den Wandfuss unter der Neigung der natürlichen Böschung gelegten Ebene halbt. Für  $\nu = 90^\circ$  folgt  $\gamma = \frac{\varphi + 90^\circ}{2}$  und für  $\nu = \varphi$  wird auch  $\gamma = \varphi$ .

Tab. 24.

Nummer	$\nu$	$\alpha$	$\gamma$	Wandbeschaffenheit
1—8	90	siehe oben	60°	siehe oben
60	70	0°	51°	
61	70	0°	52°	
62	70	0°	53°	
63	70	20°	52°	
64	70	20°	52°	
65	50	0°	43°	
66	50	0°	43°	
67	50	40°	43°	
68	50	40°	43°	
69	50	um den Fuss gekippt	43°	

(Vgl. Fig. 26 und 27).

#### 7. Gleitfläche gestampften Sandes.

Bei horizontaler Oberfläche und ebenfalls wagrechter Verschiebung gab eine verticale Holzwand in zwei Versuchen (70, 71) jedesmal  $\gamma = 70^\circ$ , während eine Holzwand (72) mit der Neigung  $\nu = 180^\circ - 50^\circ$  einen von zwei Gleitflächen begrenzten Keil gab mit den Winkeln  $\gamma = 75^\circ$  und  $\gamma_1 = 74^\circ$  (vergleiche Fig. 28).

#### 8. Anhang.

Endlich wurden, um weitere Verhältnisse nachzuahmen, welche bei Stützmaureinstürzen eintreten können, noch folgende Anordnungen getroffen: Nr. 73. Ein parallelepiped

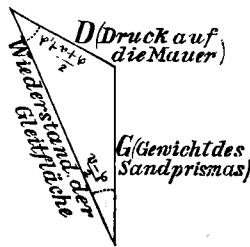
discher Klotz von 6·6<sup>cm</sup> Breite und 4·0<sup>cm</sup> Höhe wurde um seine vom Sand abstehende untere Kante gedreht, so dass unter seiner anderen Unterkante Sand durchrutschen konnte; es bildete sich eine Gleitebene mit  $\gamma = 65^\circ$ .

Nr. 74 und 75. Ein Klotz, dessen Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck bildete, wurde um den, dem Sand abgewendeten Scheitel des rechten Winkels gedreht. Dabei entstanden zwei Gleitflächen, und die der Wand zugekehrte Gleitfläche schloss bei zweimaliger Vornahme des Experiments jedesmal einen Winkel von  $25^\circ$  mit der Wandfläche oder  $65^\circ$  mit der Horizontalen ein. Da bei einigen Versuchen Audé's ähnliche Fälle vorliegen, muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass sie keinen directen Schluss auf die Vorgänge bei Umkippen um den inneren Mauerfuss zulassen.

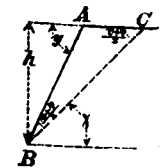
### 9. Folgerung für die Berechnung von Stützmauern.

Bei horizontaler Oberfläche und verticaler oder vorgeneigter Wand rechne man nach den Angaben von Mohr und Weyrauch, deren Theorien durch die Versuche mit wagrechter Verschiebung eine Bestätigung erfahren haben; bei Senkung der Stützmauer treten allerdings Umlagerungen der Sandkörner ein, doch scheinen diese geeignet, den Druck in ähnlicher Weise zu vermindern, wie dieses bei Senkung einer beweglichen Bodenklappe der Fall ist. Bei rückliegender Mauer, für welche die strenge Theorie bis jetzt keine Anhaltspunkte hat, lässt sich mit Hilfe der nun erlangten Kenntniss der Gleitflächenlage wenigstens Folgendes sagen.

Das Gewicht  $G$  des drückenden Prismas zerlegt sich in den Widerstand der Gleitfläche, welcher mit derselben den Winkel  $90^\circ - \varphi$  einschliesst, und in den Druck  $D$  auf die Wand, welcher einen Winkel  $90^\circ - \varphi'$  mit ihr bilden soll. Es folgt aus dem Kräftedreieck



$$D = G \frac{\sin \frac{\nu - \varphi}{2}}{\sin \left( \varphi' + \frac{\nu + \varphi}{2} \right)} \dots \dots \dots 29)$$



Das Gewicht  $G$  ist abhängig vom Prismenquerschnitt und ergibt sich (siehe Fig.) zu

$$G = \frac{\sigma}{2} A B \cdot B C \sin A B C = \sigma \frac{h^2}{2} \frac{\sin \frac{\nu - \varphi}{2}}{\sin \nu \sin \frac{\nu + \varphi}{2}}$$

wobei  $h$  die Mauerhöhe und  $\sigma$  das spezifische Gewicht der Schüttung bedeutet. Die Einsetzung in 29 liefert

$$D = \sigma \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\nu - \varphi}{2}}{\sin \nu \sin \frac{\nu + \varphi}{2} \sin \left( \varphi' + \frac{\nu + \varphi}{2} \right)} \dots \dots 30)$$

welche Gleichung zunächst noch allgemein für ein beliebiges  $\varphi'$  streng richtig ist. Nun ist bei verticaler Wand der Druck wagrecht, steht also normal zur Wand; bei rückliegender Mauer

kann man im Zweifel sein, ob er stets normal, oder — so lange der Reibungscoefficient zwischen Sand und Wand es zulässt — wagrecht bleibt. Als empirische Regel soll nun aufgestellt werden:

für  $\nu = 90^\circ$  sei  $\varphi' = 0$

für  $\nu = \varphi$  sei  $\varphi' = \varphi$

eine Bedingung, die z. B. durch die Gleichung

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \nu \dots \dots \dots 31)$$

erfüllt wird.

Mit den Formeln 30 und 31 wäre eine Näherungsmethode zur Berechnung des Druckes auf rückliegende Mauern gegeben. Die Berechnung wird einfacher, wenn man stets  $\varphi' = 0^\circ$  setzt; es geht dann Formel 30 über in

$$D = \frac{\sigma h^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{\nu - \varphi}{2} \right)}{\sin \nu \sin^2 \left( \frac{\nu + \varphi}{2} \right)} \dots \dots \dots 32)$$

Zum Vergleich soll die Normalcomponente  $N = D \cos \varphi'$  nach verschiedenen Formeln und das Resultat der Versuche Audé's neben einander gestellt werden. (Vergleiche Winkler, „Neue Theorie etc.“ \*) S. 134.)

Tabelle für  $\frac{N}{\sigma h^2}$  bei  $\cotg \varphi = 1.5$  oder  $\varphi = 33^\circ 41' 24''$ .

Tab. 25.

ctg $\nu$	Audé's Messung	Formel 30 und 31	Formel 32	Winkler's praktische Regel ( $\varphi' = \varphi$ und Maximal- druck-Prisma)
0	0,1173	0,1432	0,1432	0,1142
0,2	0,0847	0,0994	0,1082	0,0814
0,4	0,0584	0,0651	0,0785	0,0558
0,6	0,0316	0,0397	0,0536	0,0360
0,8	0,0154	0,0220	0,0330	0,0211
1,0	0,0064	0,0103	0,0171	0,0105
1,2	0,0016	0,0035	0,0062	0,0037

### III. Gleitfläche bei Sandmassen, welche seitlich gedrückt werden (Sandschub).

#### 1. Geschichtliche Einleitung.

Viele der Autoren, welche die Frage des Erddruckes behandelten, befassten sich auch mit dem praktisch weniger wichtigen Problem, welches der Schub sei, den eine Wand gegen eine Erdmasse ausüben müsse, um diese zum Ausweichen zu bringen. Poncelet behandelte diesen Fall, wie es scheint, zuerst\*\*) und zwar suchte er jenes Prisma, zu dessen Fortschieben die geringste Kraft nöthig ist und leitete eine graphische Construction ab, welche Culmann,\*\*\*) Wilhelm Ritter†) und Crugnola††) wiederholten. Reb-

\*) Die Druckmessungen gaben überhaupt Resultate, welche nach Winkler am besten mit der Theorie des Maximaldruckprismas und  $\varphi' = \varphi$  stimmen. Doch sagt Winkler: „dass sich aber immerhin noch so starke Abweichungen zeigen, dass die bisherigen Versuche keine genügende Beruhigung für die Verlässlichkeit dieser Theorie geben“.

\*\*) Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente von Poncelet, übersetzt und mit einem Anhang vermehrt von J. W. Lahmeyer, Braunschweig 1844. S. 104 u. f.

\*\*\* Die graphische Statik von K. Culmann, Zürich 1866, S. 571 u. f.

†) Die Statik der Tunnelgewölbe von Wilhelm Ritter, Berlin 1879. S. 23—25.

††) Sulla spinta delle terre etc. p. c. d. Ing. Gaetano Crugnola, Torino 1880. p. 99 u. f.

hann in seiner „Theorie des Erddruckes und der Futtermauern, Wien 1871“ gibt auf Seite 439 eine Formel, welche nach Einführung derselben Bezeichnungsweisen wie oben lautet

$$\text{ctg } \gamma = \text{ctg } (\nu - \varphi - \varphi')$$

+  $\sqrt{[(\text{ctg } \varphi + \text{ctg } (\nu - \varphi - \varphi')) [\text{ctg } (\nu - \varphi - \varphi') - \text{ctg } \nu] \text{ 33)}$  ein Ausdruck der unmittelbar aus Scheffler's Gleichung für gewöhnlichen Erddruck resultirt, wenn daselbst  $-\varphi$  statt  $\varphi$  und  $-\varphi'$  statt  $\varphi'$  gesetzt wird. Es muss bemerkt werden, dass hiernach  $\gamma$  für  $\nu = \varphi + \varphi'$  in Null überginge, so dass in diesem Falle eine horizontale Gleitfläche entstände, und der nöthige Schub unendlich gross würde, oder bei  $\nu < \varphi + \varphi'$  jedes Fortschieben unmöglich wäre. Setzt man wie Aug. Ritter\*)  $\varphi' = 0$ , so liefert Formel (33) für  $\nu = 90^\circ$

$$\text{ctg } \gamma = \text{ctg } \left( \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right)$$

Für die zum Fortschieben der Erde nöthige Kraft, welche Lahmeyer als Uebersetzer Poncelet's Hebekraft nannte, führte Culmann den Namen Schub und Rebhann passiver Erddruck ein. Scheffler, de Lafont, Winkler und Ott behandelten den betreffenden Gegenstand nicht. Considère\*\*) Mohr\*\*\*) Rankine†) und Weyrauch††) haben auch hier eine Betrachtung des kleinsten Elementes eingeführt und ist nach ihnen bei horizontaler Oberfläche und innerhalb gewisser Grenzen bei beliebig geneigter Mauer  $\gamma = \frac{90^\circ - \varphi}{2}$ . Hierbei setzten sie voraus, dass der Druck auf eine horizontale Fläche in allen Punkten derselben ein gleicher sei, also genau dem Producte aus der Tiefe dieser Ebene unter der Oberfläche in das specifische Gewicht der Schüttung entspreche, eine beim Schube jedenfalls gewagtere Annahme als beim Drucke. Bei letzterem konnte man immer sagen, es sei die Erde nicht im Augenblicke des Absturzes, sondern früher betrachtet worden und dass die Umgrenzungen nur einen Theil der Erdmasse, welche man sich als früher unendlich gross denken könne, erfasse, ohne an den statischen Verhältnissen etwas zu ändern; beim Schube ist eine solche Betrachtungsweise nicht möglich; da handelt es sich blos um den Augenblick des Rutschens und die Wandpressung bewirkt noch vor demselben eine unbekannte Umlagerung der Theilchen.]

## 2. Versuche bei horizontaler Oberfläche, verticaler Wand, horizontaler Verschiebung.

Die Versuche wurden in ganz ähnlicher Weise, wie die oben beschriebenen, vorgenommen, nur mit dem Unterschiede, dass das betreffende die Wand darstellende Holzklötzchen nicht weggezogen, sondern gegen den Sand gepresst wurde. Die Verschiebung erfolgte immer in horizontaler Richtung und wurde nur Rheinsand benützt.

Tab. 26.

Nummer	Höhe der Schüttung cm.	Grösse der Verschiebung cm.	Entfernung der rückwärtigen Begrenzung v. der Wand cm.	$\gamma$	Entfernung des Gleitflächenfusses v. Fusse der Wand cm.	Anmerkung
76	45'	?	5,8	58°	3,0	Die Gleitfläche ging durch die Oberkante der Rückwand
77	2,5	?	6,0	40°	2,0	
78	2,2	0,8	—	34°	0,8	Der Sand war rückwärts abgescb. Trotzdem verschob er sich nicht vollständig; sondern liess ein Prisma rutschen.
79	2,5	0,6	—	34°	1,5	
80	2,6	0,6	—	34°	2,5	
81	—	4,0	—	Mehrere Gleitflächen		
82	—	4,0	—	Mehrere Gleitflächen		
83	—	?	—	34°	1,6	

vgl. Fig. 29, 80 u. 81.

vgl. Fig. 29, 80 u. 31.

Bei Nummer 76 bis 82 blieben die Seitenumfassungen fest und blos die Wand wurde verschoben; da dieses möglicher Weise  $\gamma$  hätte beeinflussen können, wurden bei 83 die Seitenumfassungen mit der Wand verschoben, so dass nur die Bodenplatte an Ort und Stelle blieb.

Es lässt sich folgendes Gesetz aussprechen:

Bei horizontaler Oberfläche und verticaler Wand bildet sich bei einer rückwärts unbegrenzten Sandmasse eine ebene Gleitfläche, welche unter dem Winkel der natürlichen Böschung ansteigt, und nicht durch den Fuss der Wand geht. Bei rückwärtiger Begrenzung wird die Gleitfläche um so steiler, je geringer die Entfernung zwischen der Rückwand und der Vorderwand ist.

Bei der Verschiebung wellt sich der an der Wand anstossende Theil der Oberfläche. Bei grösserer Verschiebung entstehen mehrere zum Theil gekrümmte Gleitflächen, die Oberfläche wölbt sich etwas stärker ohne auffallende Erscheinungen zu zeigen; im Innern hingegen bilden sich Verwerfungen, wie sie bisher nur bei cohärirenden Körpern, die einem grossen Drucke ausgesetzt sind, bekannt waren, und es soll die Aehnlichkeit dieser in kleinem Maassstabe beobachteten Vorgänge mit den Schichtenknickungen, wie sie die Gebirge im grossen Dimensionen zeigen, besonders hervorgehoben werden.

## 3. Versuche bei horizontaler Oberfläche, vorgeneigter Wand und Verschiebung normal zur Wand.

Diese Versuche wurden mit dem Metallapparate in der Weise ausgeführt, dass der bewegliche Theil der Bodenfläche mit der vorschraubbaren Wand bis zur gewünschten Neigung niedergeklappt wurde, der Sand also rückwärts auf einer horizontalen, vorne auf einer zur Wand senkrechten Bodenfläche ruhte. Das Messingplättchen, welches die Wand vorstellte, wurde um es rau zu machen, mit Sand beklebt. (Siehe Tabelle 27.)

Die Gleitebenen fielen demnach bei Verschiebungen, welche unter einer geringeren Neigung als jener der natürlichen Böschung erfolgten, in die Verlängerung des geneigten Bodentheiles, auf welchem die Wand sich empor bewegte. Bei flacherer Verschiebung stieg die Gleitfläche unter dem Neigungswinkel der natürlichen Böschung an. Die Gleitfläche ging nicht nur bei 84 bis 86, sondern scheinbar auch bei 87 bis 90 durch den Fuss der Wand.

\*) Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik von Aug. Ritter, Dr. Phil. etc. Hannover 1876.

\*\*) Annal. des ponts et chaussées 1870, I. Sem. S. 561 u. f.

\*\*\* ) Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereines zu Hannover 1871—1872.

†) A manual of applied mechanics (in der 5. Aufl. S. 222—221.)

††) Theorie des Erddruckes auf Grund der neueren Anschauungen, Wien 1881, S. 29 u. f.

Tab. 27.

Num- mer	$\nu$	$\alpha$	Grösse der Verschiebung cm.	$\gamma$	Anmerkung
84	70°	20°	1.0	37°	Die rückwärtige Begrenzung ver- ursachte eine steile Gleitfläche. Die rückwärtige Begrenzung war weiter von der Wand entfernt als bei 84 und 85
85	70°	20°	1.4	40°	
86	70°	20°	1.2	33° 30'	
87	56°	34°	0.8	35° 30'	Vergl. Fig. 32 u. 33.
88	20°	70°	1.2	66°	
89	10°	80°	?	74°	
90	0°	90°	1.4	90	

Fasst man die wichtigeren Resultate dieser Untersuchung zusammen, so lauten dieselben: \*)

Beim Absturz trockenen Sandes setzt sich immer ein verticaler Cylinder in Bewegung, Hierbei nimmt die Schichten-senkung von unten nach oben ab. Der Druck auf eine Oeffnung (Kreisfläche, Stollen etc.) entspricht einer Gleichung

$$K = \frac{\gamma F^2}{2u} \cdot \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}$$

Bei horizontaler Verschiebung einer verticalen oder vorgeneigten Stützmauer oder beim Umkippen derselben

\*) Es bedeutet:  $\gamma$  spezifisches Gewicht der Schüttung,  $u$  Umfang der Bodenöffnung,  $F$  Fläche der Bodenöffnung,  $\varphi$  Neigungswinkel der natürlichen Böschung,  $\nu$  Winkel zwischen der Wand und der Horizontalen,  $\gamma$  Winkel zwischen der Gleitfläche und der Horizontalen,  $h$  Höhe der Wand.

## Schienenbefestigung auf eisernen Querschwellen.

Fig. 1 der Zeichnung auf Bl. 35 zeigt die vordere Ansicht, Fig. 2 die Draufsicht und Fig. 3 die Seitenansicht dieser Befestigung der Schienen auf geraden eisernen Querschwellen. Die geneigte Stellung der Schienen wird durch Anwendung von, mit der entsprechenden Neigung gewalzten Unterlagsplatten, Fig. 8, erzielt.

Zur Fixirung der Schiene sammt Platte in seitlicher Richtung dienen die mit Fig. 4 und Fig. 5 dargestellten Beilagen, durch deren Anwendung in verschiedenen Längen die erforderlichen Spurweiten des Geleises hergestellt werden. Beispielsweise sind der daselbst angegebenen Tabelle vier verschiedenen lange Beilagestücke zu Grunde gelegt, welche die Spurerweiterung von 4 zu 4<sup>mm</sup> bis zu 24<sup>mm</sup> ermöglichen.

Die Beilagen stossen, wie aus Fig. 7 zu entnehmen ist, auf der Innenseite der Schiene unmittelbar an den Fuss derselben, und aussen an die dort mit einem Ansatz zum Anlegen des Schienenfusses versehene Unterlagsplatte, welche letztere mit ihren beiderseitigen Einkerbungen die der Schiene zugekehrten Enden der Beilagen umfasst.

Die Befestigung der Schienen im verticalen Sinne wird durch Klemmplatten Fig. 7 und Schrauben Fig. 9 bewirkt. Zur Verhinderung des Wanderns der Schienen stösst die Innenlasche an die Beilagen auf den dem Schienenstosse nächstgelegenen Schwellen.

Das Gewicht der Schienenbefestigungsmittel beträgt für eine gerade Schwelle 6.5<sup>kg</sup>. Dasselbe würde sich für die mit Fig. 10 dargestellte Construction ohne Unterlagsplatten, also mit gebogenen Querschwellen allerdings auf 3.5<sup>kg</sup> reduciren; hingegen wird durch die Anwendung der geraden Schwelle in Verbindung mit der Unterlagsplatte eine tiefere und demnach widerstandsfähigere

um ihren inneren Fuss steigt bei horizontaler Sandoberfläche die entstehende Gleitebene unter  $\gamma = \frac{90^\circ + \varphi}{2}$  an; eine Verschiebung schräg nach abwärts hat ein grösseres  $\gamma$  zur Folge. Man rechne bei verticalen oder vorgeneigten Stützmauern nach Mohr, Weyrauch oder anderen Anhängern der „strengen“ Theorie.

Bei horizontaler Verschiebung einer rückgeneigten Stützmauer oder beim Umkippen um ihren inneren Fuss ist

$$\gamma = \frac{90^\circ + \nu}{2}$$

$$\text{Der Erddruck ist } D = \frac{\gamma h^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\nu - \varphi}{2}}{\sin \nu \sin \frac{\nu + \varphi}{2} \sin \left( \varphi' + \frac{\nu + \varphi}{2} \right)}$$

worin sich  $\varphi'$  aus  $\sin \varphi' = \operatorname{tg} \varphi \cos \nu$  näherungsweise berechnen lässt. — Bei Verschiebung des Sandes mittelst einer Wand bildet sich bei horizontaler Oberfläche und Wandbewegung eine zur natürlichen Böschung parallele Gleitebene. Eine der schiebenden Vorderwand nahe Rückwand bewirkt die Entstehung einer steileren Gleitebene. Sand kann ähnliche Schichtenknickungen erfahren wie cohärirende Massen.

Vorliegende Arbeit wurde in den Laboratorien der Herren Professoren Dr. Wüllner und Dr. Michaelis ausgeführt und es stellte hierbei auch Herr Geheimer Regierungsrath von Kaven die Mittel seines Fonds zur Verfügung. Es werde den genannten Herren Professoren für ihre bereitwillige Unterstützung, sowie Herrn Privat-Docent Dr. La Coste für vielfache Rathschläge und häufige Hilfe bei Vornahme der Versuche der beste Dank des Verfassers an dieser Stelle ausgedrückt.

Lagerung des Oberbaues in der Bettung als mit gebogenen Querschwellen erreicht.

Bei dieser Befestigung ist die seitliche Inanspruchnahme der Befestigungsschrauben vermieden, und sind die den Seitenschub der Schiene auf die Schwelle übertragenden Beilagestücke unabhängig von der Höhe und den Bewegungen des Schienenfusses in der Weise angeordnet, dass die druckübertragende Fläche derselben stets möglichst gleichmässig zur Wirkung gelangt.

Die gezeichnete eiserne Querschwelle für Hauptbahnen Fig. 6 wiegt 70<sup>kg</sup>. Für einen Raddruck von 7500<sup>kg</sup> berechnet sich die Inanspruchnahme des Materials mit 1198<sup>kg</sup> und der auf die Bettung ausgeübte Druck mit 2.0<sup>kg</sup> pro Quadrat-Centimeter.

Der Wahl des grösseren Gewichtes der Querschwelle liegt die Anschauung zu Grunde, dass die unlängbaren Vorzüge des eisernen Oberbaues gegenüber dem Holzquerschwellen-Oberbau, nämlich: die längere Dauer, sowie die weitaus widerstandsfähigere Verbindung der Fahrachse mit der Schwelle; beim eisernen Querschwellenoberbau nur dann zur vollen Geltung gelangen können, wenn denselben auch ein gewisser Ueberschuss an Widerstandsfähigkeit in Bezug auf seine Lagerung in der Bettung innewohnt; eine Bedingung, welche — namentlich Angesichts der, in dieser Hinsicht an den Oberbau von Hauptbahnen gestellten scharfen Anforderungen — ohne Anwendung eines annähernd gleichen Stabilitätsgewichtes wie solches der Holzquerschwellen-Oberbau besitzt, wohl kaum zu erreichen sein wird.

Franz Heindl,

Inspector d. k. k. General-Inspection d. ö. Eisenb.





E PUR SI

MUOVE

DEM SECHSMAL-ERWÄHLTEN  
VEREINS-VORSTEHER

DEM TREU-BEWÄHRTEN-FREUND  
VND MEISTER

FRIEDRICH SCHMIDT

ZUM ZEICHEN DANKBARER  
ANERKENNUNG und VEREHRUNG  
DIE MITGLIEDER DES

OESTERR:INGENIEVR u ARCHITECTEN:VEREINES

TE SAXA

LOOVVNTVR



# TINTER HOHMANN'S PRÄCISIONS - POLARPLANIMETER.

Patent: Hohmann - Coradi.

Fig. 1.

Grundriss des Instrumentes in der Lage, wenn der Fahrarm zum Leitarme senkrecht gestellt wird

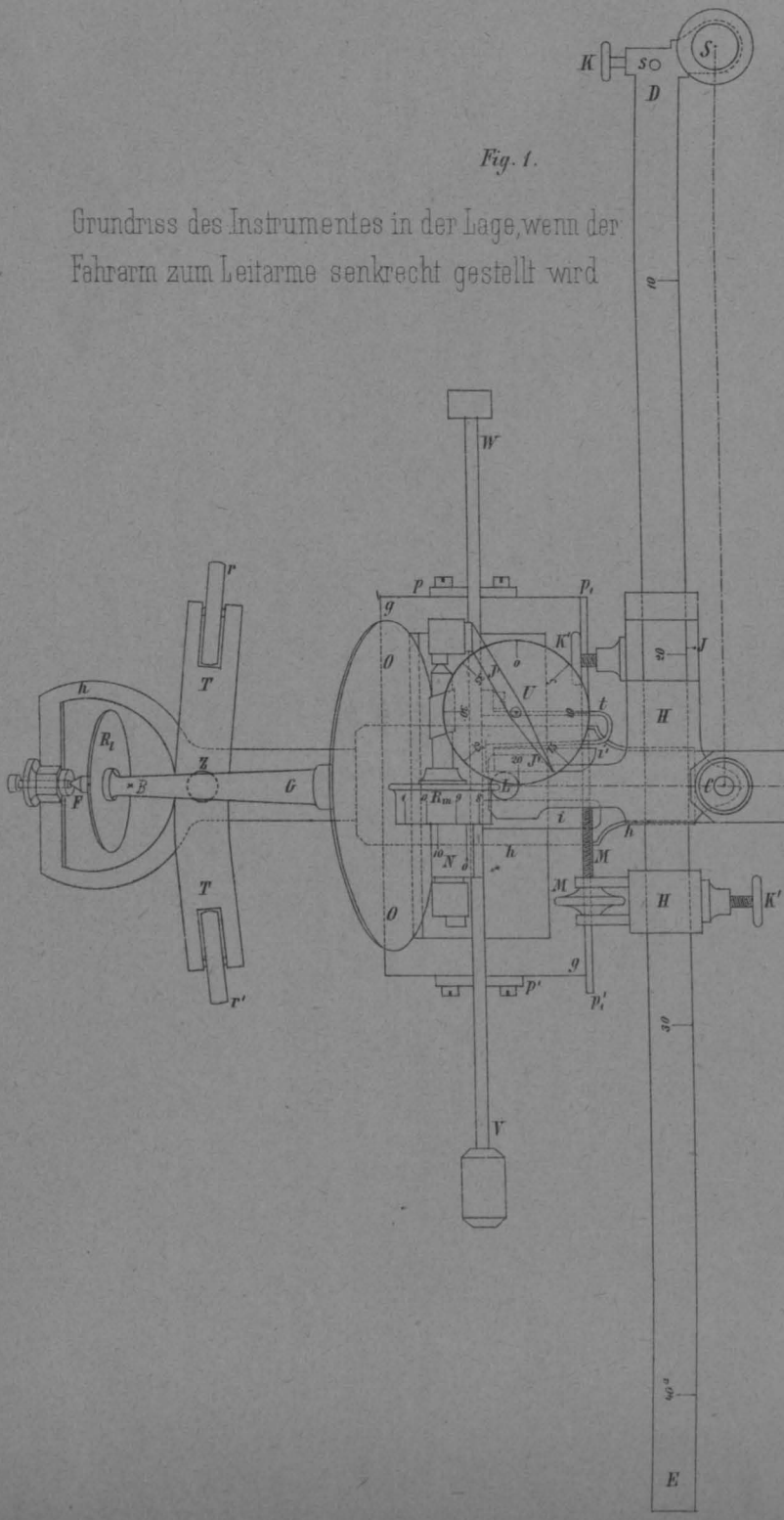


Fig. 4.

Verbindung des Leitarmes mit dem Fahrarme.

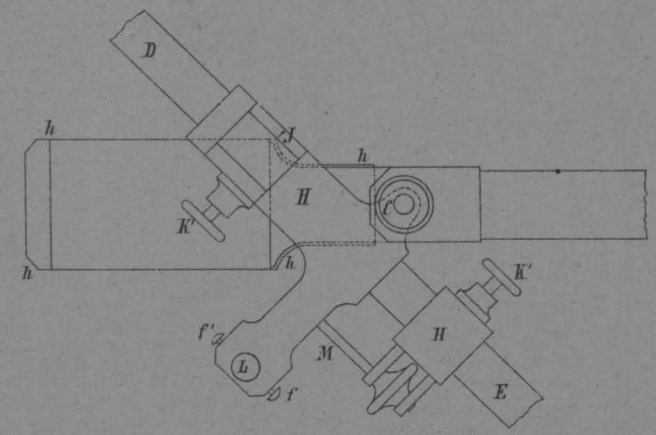
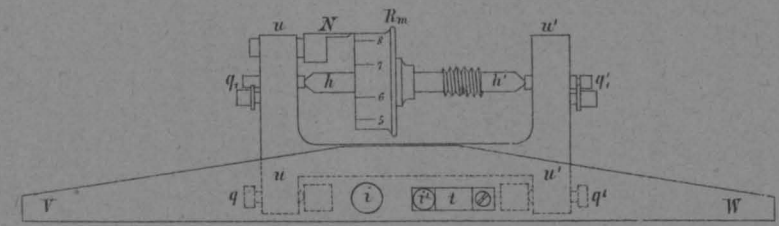


Fig. 2.

Vordere Ansicht des Schlittens mit der Messrolle



Grundriss des Schlittens ohne Messrolle

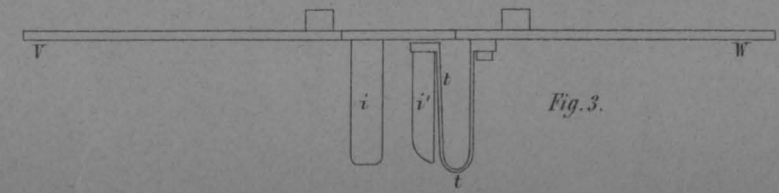


Fig. 3.

Massstab:  $\frac{2}{3}$  natürlicher Grösse.

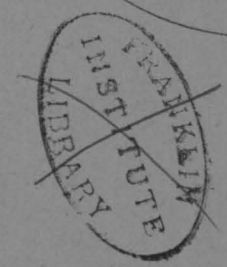




Fig. 1.

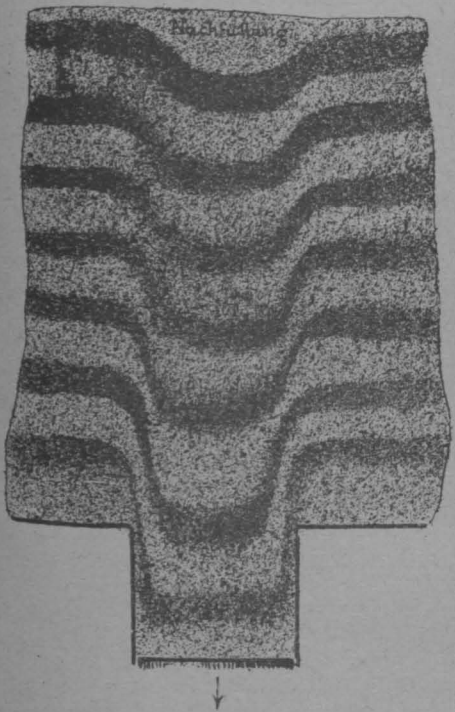


Fig. 2 Stöpselsenkung.

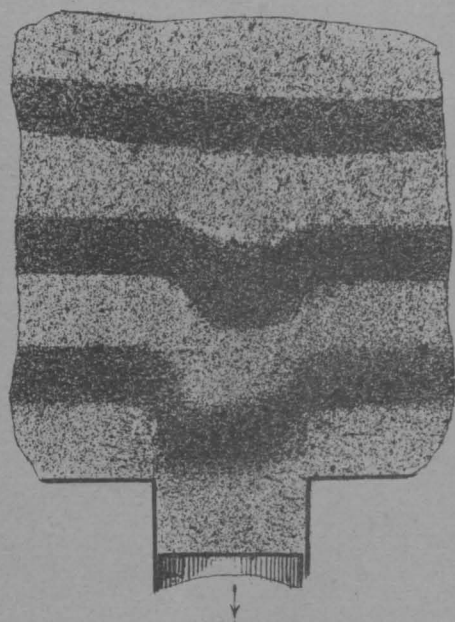


Fig. 3.

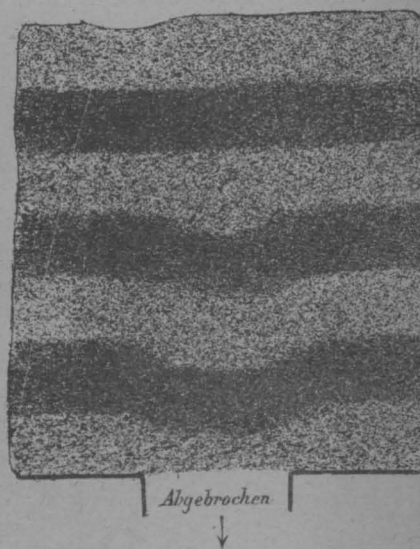


Fig. 4. Schräge Stöpselsenkung

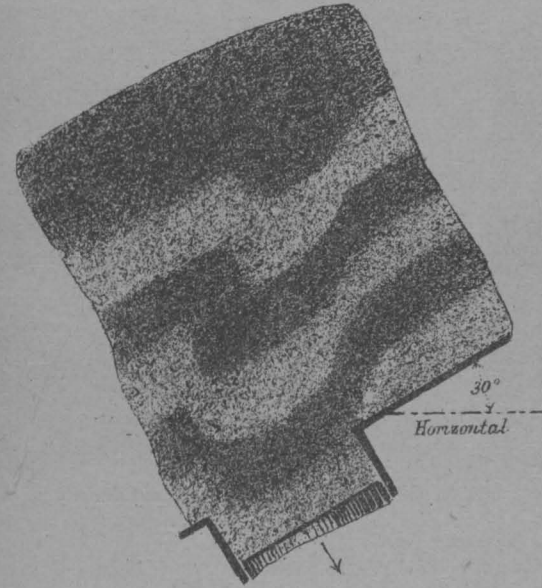


Fig. 5



Fig. 6.



Fig. 12

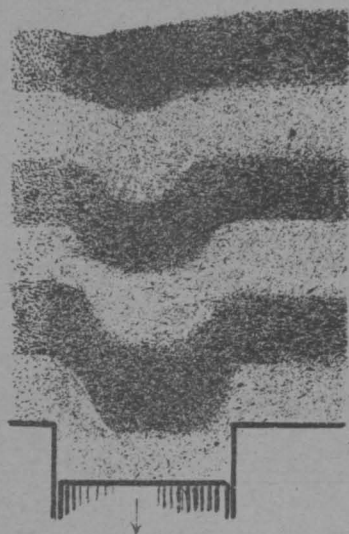


Fig. 13

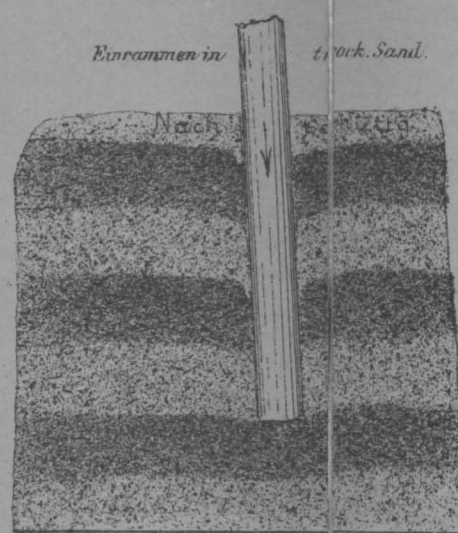


Fig. 14

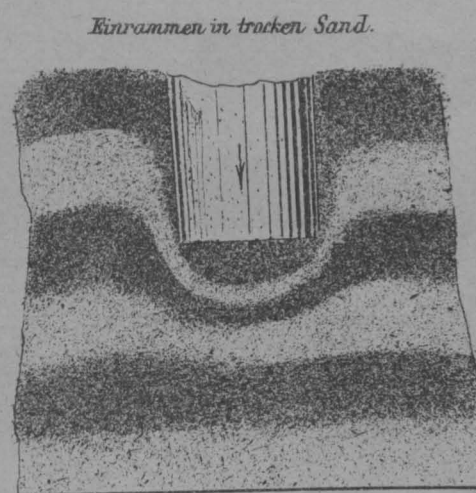


Fig. 15.

Einrammen in nassem Sand.

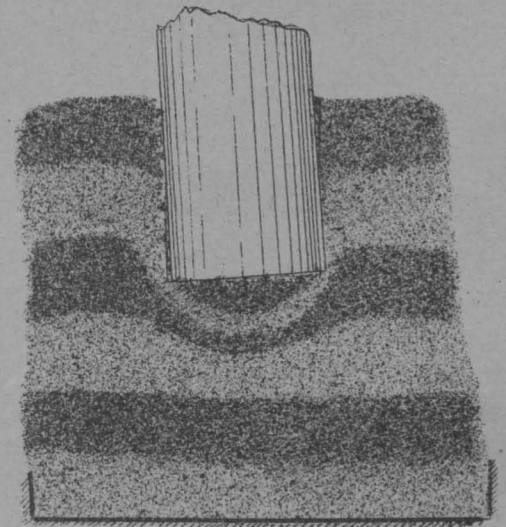


Fig. 20.

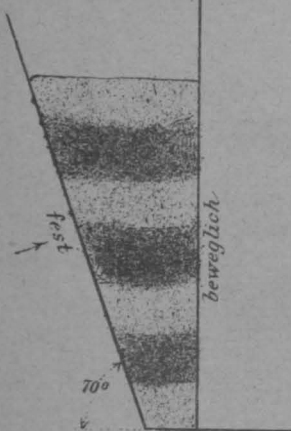


Fig. 21



Fig. 22

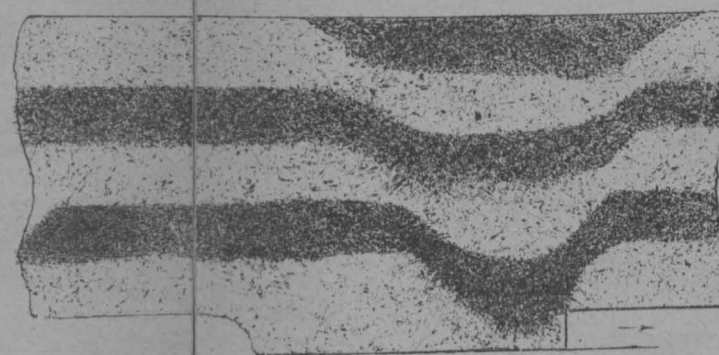


Fig. 23.

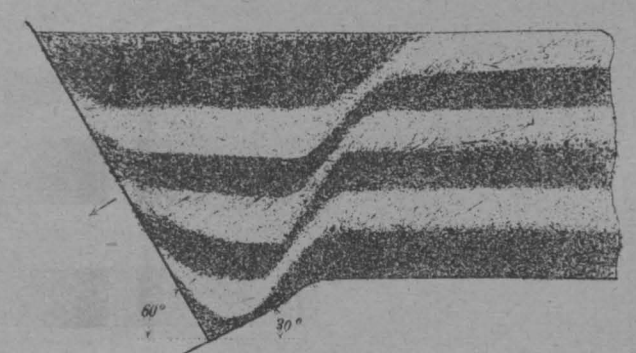


Fig. 27

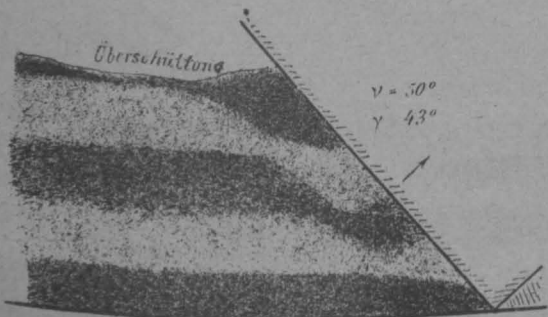


Fig. 28.

Gestampfter Sand.

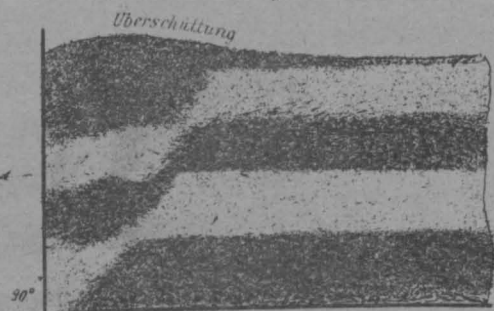


Fig. 29



Fig. 30.





K.

Fig. 7.

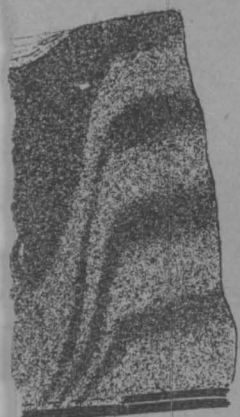


Fig. 8.

Sturz durch eine Öffnung (nasser Sand).

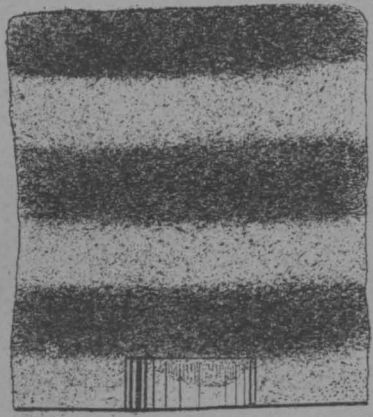


Fig. 9.

Querschnitt

umgeklappt

Längenschnitt

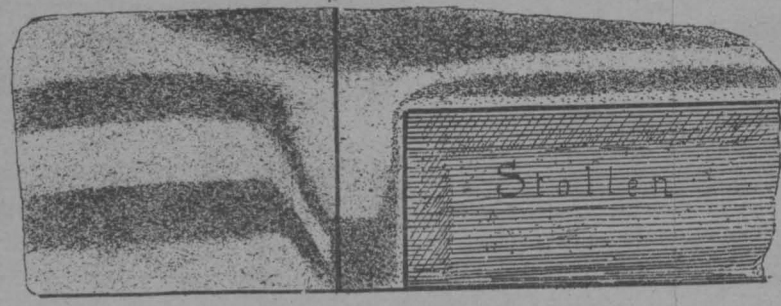


Fig. 10.

Nasser Sand m. einem Klotz niedergedr.

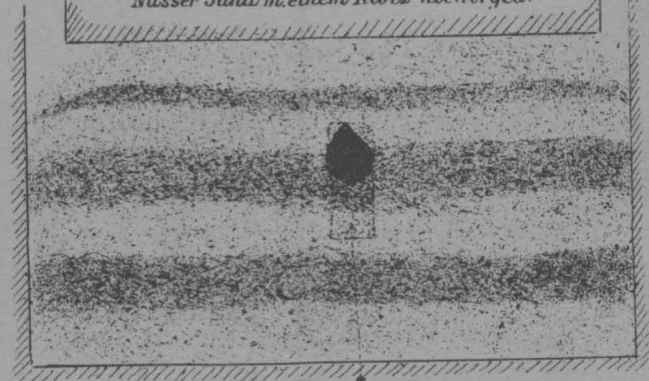


Fig. 16.

Herausziehen eines Pfahls

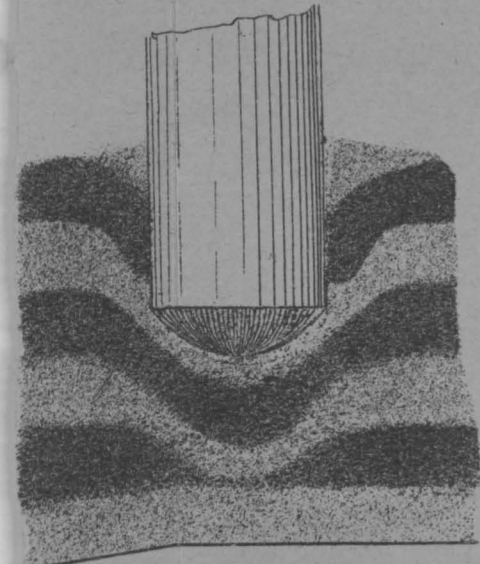


Fig. 17.

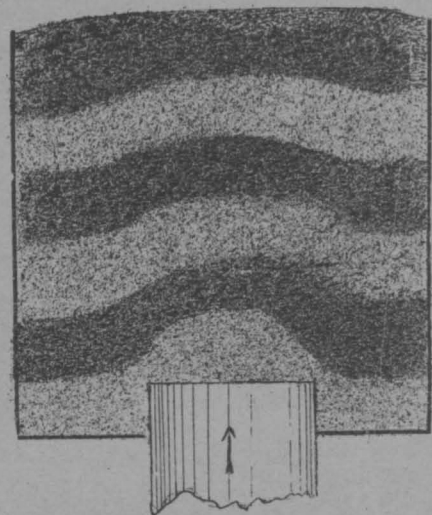


Fig. 18.

Nachfüllg.

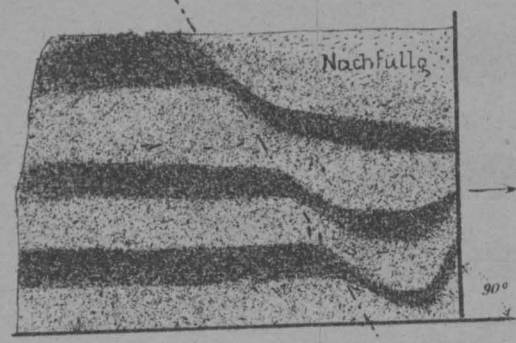


Fig. 19.

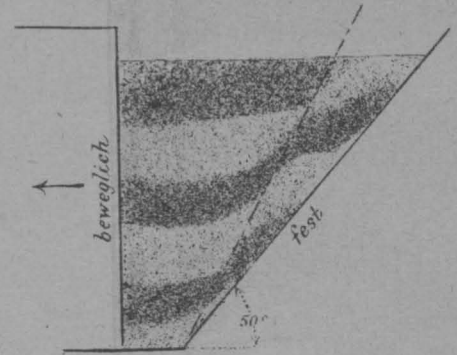


Fig. 25.

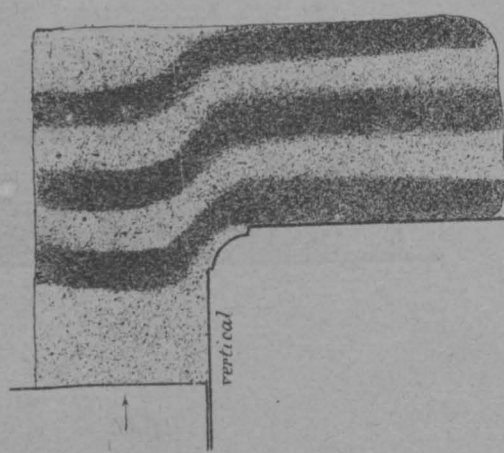


Fig. 26.

Vers. 55. v. 70° 72 1/2°

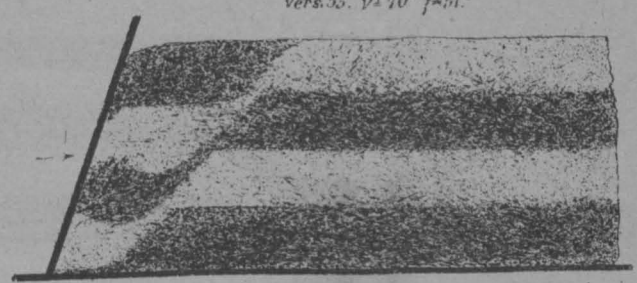


Fig. 24.

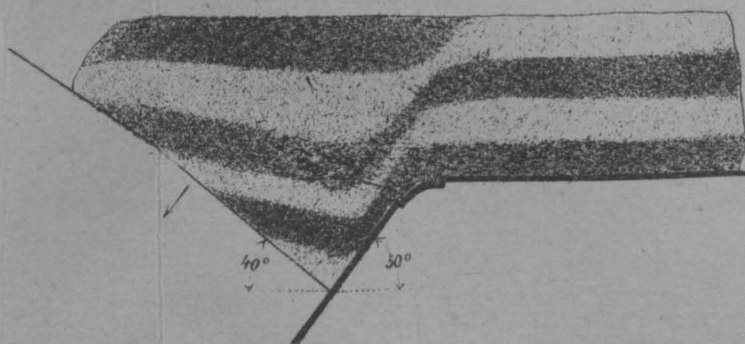


Fig. 31.

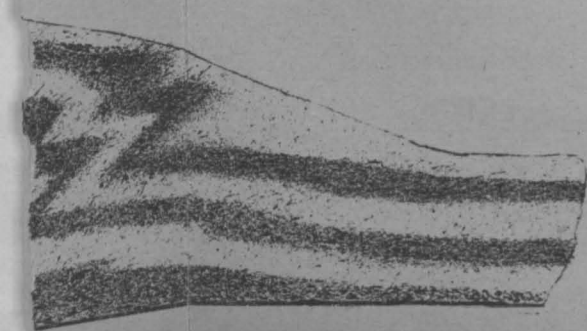


Fig. 32.

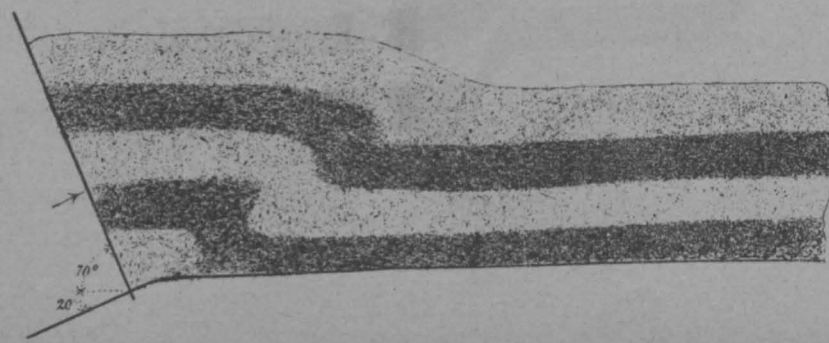


Fig. 33.

